

Numerična linearna algebra, 1. izpit, 9. 6. 2021

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski!

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [20 točk]

Matrika $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, ki preslika enotsko sfero v elipsoid, je določena s slikami vektorjev

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Najдите njen singularni razcep, pogojenostno število ter približek A_1 ranga 1, pri katerem je dosežena najmanjša vrednost izraza $\|A - A_1\|_2$.

Naloga 2 [20 točk]

Za simetrično tridiagonalno matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 3 & & & \\ & 3 & 0 & 5 & & \\ & & 5 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 2n-3 \\ & & & & 2n-3 & 0 \end{bmatrix},$$

velikosti $n \times n$, ugotovite, koliko pozitivnih in koliko negativnih lastnih vrednosti ima, in ali je obrnljiva.

Naloga 3 [20 točk]

Z metodo *deli in vladaj* izračunajte lastne vektorje in lastne vrednosti simetrične tridiagonalne nerazcepne matrike

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

V postopku naj bo delitev izvedena na dva enako velika podproblema. Netrivialne lastne vrednosti določite s pomočjo sekularne enačbe.

Naloga 4 [20 točk]

Naj bodo $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $X, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- (a) Pokažite, da so lastne vrednosti matrike $A \otimes B$ oblike $\lambda_i \mu_j$, kjer so λ_i lastne vrednosti matrike A in μ_j lastne vrednosti matrike B .
- (b) Pokažite, da velja $\text{vec}(AXB) = (B^\top \otimes A)\text{vec}(X)$.
- (c) Pokažite, kako lahko prevedemo reševanje matrične enačbe $AXB - X = C$ na reševanje sistema linearnih enačb. Kaj mora veljati za matriki A in B , da je enačba enolično rešljiva?