

Numerična linearna algebra, 2. izpit, 20. 8. 2021

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [20 točk]

Dan je nedoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & -8 \\ 18 & -5 & -24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Izračunajte psevdoinverz matrike A .
- (b) Določite $\mathbf{x}$, ki reši nedoločen sistem in ima izmed vseh rešitev najmanjšo drugo vektorsko normo.

Naloga 2 [20 točk]

Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ i & 0 & 5-2i & 3 \\ -i & i & 0 & 12-2i \end{bmatrix}.$$

(a) Z uporabo 1. in 2. Gerschgorinovega izreka na matriki A in $A^\top$ čim bolj natančno določite in skicirajte območja, v katerem so vsebovane lastne vrednosti matrike A . Za vsako območje določite tudi število vsebovanih lastnih vrednosti. Ali lahko sklepamo, da je matrika A obrnljiva?

(b) Z uporabo podobnostne transformacije PAP^{-1} preko matrike $P = \text{diag}([1 \quad 1 \quad 1 \quad k])$ za $k > 0$ poiščite čim boljšo oceno za lastno vrednost matrike A , ki ima največji realni del.

Naloga 3 [20 točk]

Naj bo μ kompleksna lastna vrednost realne matrike A z desnim lastnim vektorjem $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$ in levim lastnim vektorjem $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2$.

(a) Pokažite, da je matrika

$$B := A - \mu \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^H}{\mathbf{y}^H\mathbf{x}} - \overline{\mu} \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}^H}{\mathbf{y}^H\mathbf{x}}$$

Hotellingova redukcija matrike A za par lastnih vrednosti μ in $\bar{\mu}$.

(b) Pokažite, da je matrika B realna in da je enaka matriki

$$\left(I - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \end{bmatrix} \right) A,$$

kjer je $\alpha + i\beta = 1/(\mathbf{y}^H\mathbf{x})$.

Naloga 4 [20 točk]

Dokažite, da lahko polinomski problem lastnih vrednosti za polinom $P(\lambda) = \sum_{i=0}^3 \lambda^i A_i$, kjer je $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$, prevedemo na reševanje linearnega (tj. posplošenega) problema za polinom $\tilde{P}(\lambda) = \lambda \tilde{A}_1 + \tilde{A}_0$, kjer je

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} P_1 & I & \\ I & & \\ & & P_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & & \\ & I & \\ & I & P_2 \end{bmatrix}.$$

Določite zvezo med lastnim vektorjem polinomskega in lineariziranega problema.