NLA

1. izpit

26. 6. 2012

1. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiščite ocene za lastne vrednosti s pomočjo Gerschgorinovega izreka. Dokaži, da za najmanjšo lastno vrednost velja še močnejša ocena. Uporabi Gerschgorinov izrek za podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D primerna diagonalna matrika, ki ima samo en diagonalni element različen od 1.

2. Nesingularna matrika A se da diagonalizirati ($AX = X\Lambda$), kjer je X matrika lastnih vektorjev in $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti. Naj bo μ približek za lastno vrednost in z približek za pripadajoči lastni vektor. Označimo $r = Az - \mu z$.

   (a) Izpelji oceno: $\min_i |\mu - \lambda_i| \le \dfrac{\|r\|}{\|z\|}\|X\|\|X^{-1}\|$.

   (b) Izpelji oceno: $\min_i \dfrac{|\mu - \lambda_i|}{|\lambda_i|} \le \dfrac{\|r\|}{\|Az\|}\|X\|\|X^{-1}\|$.

   Nasvet: Predpostavi, da μ ni točna lastna vrednost in upoštevaj $z = (A - \mu I)^{-1} r$.

3. Podana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} I & Z \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$
Pokažite, da za občutljivost matrike velja: $\kappa(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$ velja
$$\kappa(A) = \frac{2 + \sigma_1^2 + \sqrt{4\sigma_1^2 + \sigma_1^4}}{2},$$
kjer je σ_1 največja singularna vrednost matrike Z.

4. Podan je palindromski problem lastnih vrednosti
$$P(\lambda)x = (\lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0)x = 0,$$
kjer je problem:

   a) T-palindromski: $A_2 = A_0^T$ in je A_1 simetrična matrika,

   b) palindromski: $A_2 = A_0$,

   c) sod: $A_0 = A_0^T, A_2 = A_2^T$ in A_1 poševno simetrična matrika.

   Pokaži, da lastne vrednosti nastopajo v parih (četvorkah) in razišči njihovo strukturo.