

NLA

1. izpit

6. 6. 2014

1. Dana je matrika

$$\begin{bmatrix} 15 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 15 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 20 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 40 \end{bmatrix}$$

- (a) Čim bolj natančno določite območja, v katerih se nahajajo lastne vrednosti matrike A . Upoštevajte, da imata matriki A in A^T enake lastne vrednosti. Območja tudi narišite.
- (b) Ocene lahko izboljšamo, če gledamo podobno matriko $Q A Q^{-1}$. Poiščite optimalno matriko oblike $Q = \text{diag}(1, 1, 1, k)$, pri kateri dobite najboljše ocene za največjo lastno vrednost.

2. Pri QZ algoritmu se srečamo z naslednjim problemom. Dani sta matriki A in B oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

Poišči taki ortogonalni matriki Q in Z , da bo matrika $A_1 = Q A Z$ zgornja Hessenbergova, matrika $B_1 = Q B Z$ pa zgornja trikotna. Matriki Q in Z ti ni treba eksplicitno zapisati.

3. Separacijo med matrikami A_1 in A_2 definiramo kot:

$$\text{sep}(A_1, A_2) = \min_{X \neq 0} \frac{\|A_1 X - X A_2\|_F}{\|X\|_F}.$$

Naj bo $A = \begin{bmatrix} \lambda & v^T \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$, $\lambda \notin \lambda(T_{22})$, in $\sigma = \text{sep}(\lambda, T_{22})$. Dokaži, da velja:

- (a) $\sigma = \sigma_{\min}(T_{22} - \lambda I)$
- (b)

$$s(\lambda) = |y^H x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \|v^T(T_{22} - \lambda I)^{-1}\|_2^2}} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \|v\|_2^2}},$$

kjer sta x in y normirana desni in levi lastni vektor za λ matrike A .

4. Dani sta matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$ z ortonormiranimi stolpci ter singularni razcep $A = U \Sigma V^T$. Učinkovito poišči singularni razcep matrike $B = \begin{bmatrix} A & -A Q \end{bmatrix}$, kjer izkoristiš, da poznaš singularni razcep matrike A . Opiši tudi kako učinkovito poiščeš jedro matrike B .