

NLA

2. izpit

30. 6. 2014

1. Določi območje, v katerem se nahajajo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & 15 \end{bmatrix}.$$

- (a) Uporabi Gerschgorinov izrek. Upoštevaj tudi, da imata matriki A in A^T iste lastne vrednosti.
(b) Podobna matrika $Q A Q^{-1}$ ima iste lastne vrednosti kot matrika A . Ponavadi si za Q izberemo kar diagonalno matriko. Poišči optimalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

pri kateri dobiš najboljše oceno za najmanjšo lastno vrednost. Kaj lahko poveš o ostalih lastnih vrednostih?

2. Poišči število lastnih vrednosti na intervalih $(-\infty, -2]$, $(-2, 2]$, $(2, \infty)$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & 1 & \\ & & & 1 & -3 & 1 \\ & & & & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrični matriki z lastnimi pari razvrščenimi po velikosti in normiranimi lastnimi vektorji: (α_i, u_i) , $i = 1, \dots, m$ in (β_i, v_i) , $i = 1, \dots, n$. Pokaži, da ima matrika

$$C = \begin{bmatrix} A & \rho u_1 v_1^T \\ \rho v_1 u_1^T & B \end{bmatrix}$$

lastne vrednosti $\alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2$, kjer sta γ_1 in γ_2 lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \rho \\ \rho & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

4. Radi bi izračunali kosinus prvega glavnega kota med podprostoroma, ki ju razpenjajo stolpci matrik A_1 in A_2 , ki imata enako vrstic. Tvoja naloga je poiskati vektorja z_1 in w_1 , tako da velja

$$\cos(\Phi_1) = \max_{\substack{z_1 = A_1 d_1, \ w_1 = A_2 f_1 \\ \|z_1\| = 1, \ \|w_1\| = 1}} z_1^T w_1.$$

Kako bi poiskal še vse druge kote, kjer maksimiziraš izraz

$$\cos(\Phi_i) = \max_{\substack{z_i = A_1 d_i, \ w_i = A_2 f_i \\ z_i \perp z_j, \ w_i \perp w_j \text{ za } j < i \\ \|z_i\| = 1, \ \|w_i\| = 1}} z_i^T w_i.$$

Nasvet najprej predstavi vektorje z_i in w_i v ortogonalni bazi in nato primerno uporabi singularni razcep.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\sqrt{pi}}{6} \left(f(-\frac{\sqrt{6}}{2}) + 4f(0) + f(\frac{\sqrt{6}}{2}) \right)$$