

NLA

3. izpit

1. 9. 2014

1. Naj bo matrika A odvisna od parametra x ,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & x+1 \\ 0 & x+1 & x-2 \end{bmatrix}.$$

Določi interval na katerem mora ležati parameter x , da bo imela matrika A na intervalu $(3, 5]$ natanko eno lastno vrednost.

2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$, kjer je $\|x\|_2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ter $\epsilon \geq 0$. Pokaži, da če velja $\|Ax - \lambda x\|_2 < \epsilon$, potem je $\min_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \lambda| < \epsilon$.
3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dan je polarni razcep matrike, $A = UH$, kjer ima matrika U ortonormirane stolpce, H pa je simetrična, pozitivno semidefinitna. Dokaži, da velja;

$$\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - U\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2.$$

Namig: Najprej pokaži enakosti:

$$A^T A - I = (A - U)^T (A + U), \quad (A - U)^T U = (A^T A - I)(H + I)^{-1}.$$

4. Opiši algoritem, ki s pomočjo singularnega razcepa poišče ortonormirano bazo za unijo in presek dveh podprostorov $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, ki sta določena z linearno ogrinjačo stolpcev matrik A in B .