

NLA

3. izpit

19. 8. 2016

1. Določite območje, v katerem se nahajajo lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & 15 \end{bmatrix}.$$

- (a) Uporabite Gerschgorinov izrek. Upoštevajte tudi, da imata matriki A in A^T iste lastne vrednosti.
- (b) Podobna matrika $Q A Q^{-1}$ ima iste lastne vrednosti kot matrika A . Ponavadi za Q izberemo kar diagonalno matriko. Poišči optimalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

pri kateri dobiš najboljšo oceno za najmanjšo lastno vrednost. Kaj lahko poveste o ostalih lastnih vrednostih?

2. Pri QZ algoritmu se srečamo z naslednjim problemom. Dani sta matriki A in B oblike

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

iščemo pa taki ortogonalni matriki Q in Z , da bo matrika $A_1 = Q A Z$ zgornja Hessenbergova, matrika $B_1 = Q B Z$ pa zgornja trikotna. Iz Givensovih rotacij in Householderjevih zrcaljenj sestavi matriki Q in Z .

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dan je polarni razcep matrike, $A = UH$, kjer ima matrika U ortonormirane stolpce, H pa je simetrična, pozitivno semidefinitna. Dokaži, da velja;

$$\frac{\|A^T A - I\|_2}{\|A\|_2 + 1} \leq \|A - U\|_2 \leq \|A^T A - I\|_2.$$

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrika, $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$. Delna sled prostora $\mathcal{V}$ dimenzije $m \leq n$ je definirana kot:

$$\text{sl}(A|_{\mathcal{V}}) := \text{sl}(V^T A V) = \sum_{i=1}^m v_i^* A v_i,$$

kjer je $V = [v_1, \dots, v_m]$ poljubna ortonormirana baza prostora $\mathcal{V}$. Pokaži, da velja

$$\lambda_1(A) + \dots + \lambda_k(A) = \sup_{\dim(\mathcal{V})=k} \text{sl}(A|_{\mathcal{V}}) \text{ in } \lambda_{n-k+1}(A) + \dots + \lambda_n(A) = \inf_{\dim(\mathcal{V})=k} \text{sl}(A|_{\mathcal{V}}).$$

Namig, pomagaj si z indukcijo po dimenziji prostora $\mathcal{V}$. Z uporabo zgornjega dokaži še:

$$\lambda_{n-k+1}(A) + \dots + \lambda_n(A) \leq a_{i_1 i_1} + \dots + a_{i_k i_k} \leq \lambda_1(A) + \dots + \lambda_k(A), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$