

Numerična linearna algebra 2001/2002

1. kolokvij

17.1.2002

1. Pokaži, da je $0.1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-4i} + 2^{-4i-1}$, in od tod pokaži, da je binarni zapis za $x = 0.1$ enak $0.000\overline{1100}$ (zadnji 4 biti se ponavljajo). Naj bo $\text{fl}(x) := \hat{x}$ zaokroženo število 0.1 v binarni IEEE aritmetiki z enostavno natančnostjo ($u = 2^{-24}$). Pokaži, da je $\frac{x-\hat{x}}{x} = -\frac{1}{4}u$.

2. Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strogo diagonalno dominantna. Dokaži:

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1; j \neq i}^n |a_{ij}| \right)}.$$

3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

kjer sta A_{11} in A_{22} kvadratni, A_{11} in $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ pa nesingularni matriki. Naj bo

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

inverz matrike A .

a) Pokaži:

$$\begin{aligned} B_{22} &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ B_{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \\ B_{21} &= -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} \\ B_{11} &= A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

b) Koliko operacij v premični piki potrebujemo za izračun A^{-1} s pomočjo (a), če je $A_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$?

4. Dana je matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dokaži Hadamardovo neenakost:

$$|\det A|^2 \leq \prod_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{jk}|^2.$$

Namig: pomagaj si s QR razcepom matrike A .