

Numerična linearna algebra

1. kolokvij

19.1.2004

1. Uporabi Halleyevo metodo za reševanje $f(x) = 0$:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r) - \frac{f''(x_r)f(x_r)}{2f'(x_r)}}$$

za izračun $\sqrt[3]{a}$.

a) Dokaži, da je konvergenca vsaj kubična.

b) S pomočjo gornje iteracije izračunaj $\sqrt[3]{5}$ na 6 decimalnih natančno. Za začetni približek vzemi $x_0 = 1$.

2. Naj bo $a \neq 0$ in matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definirana z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Izračunaj $\|A^k\|_\infty$ in $\|A^k\|_1$.

b) Izračunaj $\kappa_\infty(A)$.

3. Dane so matrike $A, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L naj bo spodnje trikotna matrika z enicami na diagonalni, U pa nesingularna zgornje trikotna matrika. Zapiši algoritem za izračun spodnje trikotne matrike M z ničlami na diagonalni in zgornje trikotne matrike V , tako, da velja enačba $A = MU + LV$. Preštej število operacij.

4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

$R \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $v, d \in \mathbb{R}^{m-k}$, $w, c \in \mathbb{R}^k$, in naj ima matrika A poln stolpčni rang.

a) Dokaži:

$$\min \|Ax - b\|_2 = \sqrt{\|d\|_2^2 - (v^T d / \|v\|_2)^2}.$$

b) Posploši rezultat iz a) na primer, ko je $w \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $v \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}$, in ima A poln stolpčni rang.