Numerična linearna algebra

1. kolokvij

12.1.2006

1. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Zaporedje približkov $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ računamo rekurzivno po formuli
$$x_{k+1} = \frac{x_k^4 + 2\,a\,x_k}{2\,x_k^3 + a}. \tag{1}$$

   a) Izračunaj $\sqrt[3]{10}$ na 6 decimalnih mest z zgornjo iteracijo in $x_0 = 3$.

   b) Določi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da bo konvergenca zaporedja
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{3-\lambda} - a\,x_k^{-\lambda}}{(3-\lambda)\,x_k^{2-\lambda} + \lambda\,a\,x_k^{-\lambda-1}}, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$
   k vrednosti $\sqrt[3]{a}$ vsaj kubična. Nato preveri, da pri tako izračunanem parametru λ dobiš ravno iteracijo (1).
   Nasvet: oglej si povezavo med števcem in imenovalcem ulomka.

2. Z LU razcepom s popolnim pivotiranjem reši sistem $Ax = b$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
   Določi permutacijski matriki P in Q, ter trikotni matriki L in U tako, da velja $PAQ = LU$.

3. Naj bo B zgornja bidiagonalna matrika reda $n \times n$ z diagonalnimi elementi b_i in elementi na obdiagonali c_i. Sestavi učinkovit algoritem za izračun pogojenostnega števila $\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \, \|B^{-1}\|_\infty$. Preštej število seštevanj, množenj, deljenj in izračunov absolutnih vrednosti, ki jih potrebuje tvoj algoritem.
   Nasvet: oglej si primer $n = 4$. Najprej izračunaj inverz.

4. Naj bosta $T, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zgornje trikotni matriki, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, in $ST - \lambda I$ nesingularna matrika. Sestavi učinkovit ($O(n^2)$) algoritem za reševanje sistema $(ST - \lambda I)x = b$ in preštej število operacij.
   Nasvet: izračun $ST - \lambda I$ zahteva $O(n^3)$ operacij. Obravnavaj podsisteme velikosti $n - k$ v bločni obliki:
$$S_+ = \begin{bmatrix} \sigma & u^T \\ 0 & S_c \end{bmatrix}, \; T_+ = \begin{bmatrix} \tau & v^T \\ 0 & T_c \end{bmatrix}, \; b_+ = \begin{bmatrix} \beta \\ b_c \end{bmatrix}$$
   in pokaži, da lahko s pomočjo znane rešitve sistema $(S_cT_c - \lambda I)x_c = b_c$ dobimo rešitev $x_+ = \begin{bmatrix} \gamma \\ x_c \end{bmatrix}$ sistema $(S_+T_+ - \lambda I)x_+ = b_+$.