Numerična linearna algebra 2001/2002

2. kolokvij

6.6.2002

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$. Dokaži:

   a.) $||A||_2 \, ||(A^TA)^{-1}A^T||_2 = \kappa_2(A)$,

   b.) $||A||_2^2 \, ||(A^TA)^{-1}||_2 = (\kappa_2(A))^2$.

2. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$ in P Householderjeva matrika, tako, da velja $Px = \pm||x||_2 e_1$. Naj bodo $G_{1,2}, G_{2,3}, ..., G_{n-1,n}$ Givensove rotacije, tako, da je: $Qx := G_{1,2}G_{2,3}...G_{n-1,n}x = \pm||x||_2 e_1$. Dokaži ali ovrzi: Q=P ?

3. Recimo, da lahko matriko A zapišemo v obliki

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

   kjer so vse matrike $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratne, in imajo skupnih n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Pokaži, da so lastne vrednosti matrike A enake lastnim vrednostim matrik

$$\Lambda_k := \begin{bmatrix} \lambda_k^{11} & \lambda_k^{12} \\ \lambda_k^{21} & \lambda_k^{22} \end{bmatrix},$$

   kjer je λ_k^{ij} lastna vrednost matrike A_{ij}, ki pripada k-temu skupnemu lastnemu vektorju.

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna, in naj ima matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $k \leq n$, poln rang. Pokaži, da je potem tudi matrika $T = Q^TAQ$ simetrična pozitivno definitna.