

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

15. junij 2018

1. (25 točk) Naj bo $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$. V igri na srečo, ki jo igramo zapored, znova in znova, se nam, vsakič neodvisno, premoženje poveča za 1 z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ in zmanjša za 1 z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Naše začetne premoženje je 0. Naj bo T zaporedna številka igre, ko bomo prvič bodisi imeli premoženje a ali pa bomo v izgubi za b ($T = \infty$ na dogodku, da se to nikoli ne zgodi). Z uporabo Waldovih identitet ali sicer (i.) pokaži, da je $E[T] < \infty$, (ii.) določi verjetnost, da bomo prej imeli premoženje a kot bomo v izgubi za b , ter (iii.) določi $E[T]$. **Spomnimo.** Waldova 2. identiteta: $\text{var}(\sum_{i=1}^N Y_i) = E[N]\text{var}(Y_1) + (E[Y_1])^2\text{var}(N)$ za N z vrednostmi v $\mathbb{N}$ in končnim upanjem, ki je neodvisna od $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ki so n.e.p. s končnima upanjem in varianco.

Rešitev. Naj bo X_n naše premoženje ob času n , $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, kjer so Y_k , $k \in \mathbb{N}$, n.e.- po shemi $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ -p. Naj bo T slučajni čas, ko bomo prvič bodisi imeli premoženje a ali pa v izgubi za b . Za vsak $N \in \mathbb{N}$, je $T \wedge N$ omejen čas ustavljanja glede na naravno filtracijo zaporedja $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Posledično je po Waldovi prvi identiteti, $EX_{T \wedge N} = E[T \wedge N]EY_1 = 0$ in zato po Waldovi drugi identiteti $EX_{T \wedge N}^2 = \text{var}(Y_1)E[T \wedge N]$. Pošljemo $N \uparrow \infty$ in uporabimo monotono konvergenco ter $|X_{T \wedge N}| \leq \max\{a, b\}$, $\text{var}(Y_1) > 0$, pa dobimo $E[T] < \infty$ (v posebnem, $T < \infty$ s.g.). Nato je spet iz Waldove prve identitete $EX_T = EY_1ET = 0$. Ker je $EX_T = aP(X_T = a) - bP(X_T = -b)$ in $P(X_T = a) + P(X_T = -b) = 1$, sledi $P(X_T = a) = \frac{b}{a+b}$ in $P(X_T = -b) = \frac{a}{a+b}$. Končno je sedaj po Waldovi 2. identiteti $EX_T^2 = \text{var}(Y_1)ET$. Ker je $EX_T^2 = \frac{b}{a+b}a^2 + \frac{a}{a+b}b^2 = ab$ in $\text{var}(Y_1) = 1$, sledi $ET = ab$.

2. (25 točk) Naj bo $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Nick in Matthew tekmujeta na plavalnih mitingih; Nick plava prsno, Matthew pa delfina; tekmujeta neodvisno. Nick je prvouvrščen ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^1 intenzitete λ_1 , Matthew pa je prvouvrščen ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^2 intenzitete λ_2 . Določi verjetnost, da bo Matthew kdaj imel k zmag več kot Nick. **Pomoč.** Iz problema kockarjevega propada je znano sledeče: Če je $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ slučajni sprehod na $\mathbb{Z}$, pri čemer je $Z_0 = 0$ in $P(Z_1 = 1) = p = 1 - P(Z_1 = -1)$, tedaj je verjetnost, da slučajni sprehod Z kdaj zadane nivo k enaka $(\frac{p}{1-p})^k \wedge 1$.

Rešitev. Mislimo si lahko markiranje enega samega homogenega procesa N z intenziteto $\lambda_1 + \lambda_2$ in markacijama Nick oz. Matthew z verjetnostima $\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ oz. $\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$. Razlika med številom zmag Matthewa in Nicka je tedaj slučajni

sprehod Z , ki na vsakem koraku naraste za 1 z verjetnostjo $p := \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ (zmaga Matthew) in pade za 1 z verjetnostjo $q := 1 - p = \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$ (zmaga Nick). Torej nas zanima ravno verjetnost, da Z kdaj zadane nivo k , če začne v 0. Torej je odgovor $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k \wedge 1$.

[Izpeljava resnice iz pomoči: Naj bo p_k verjetnost, da Z kdaj doseže nivo 0, pri čemer začne Z v $k \in -\mathbb{N}_0$. Znano je, da je $p_k = 1$, če je $p \geq q$ (npr. (za $p > q$) iz krepkega zakona velikih števil, in (za $p = q$) ker simetrični enostavni slučajni sprehod oscilira (slednje sledi npr. iz Walda; glej prejšnjo nalogo)). Naj bo $p < q$. Tedaj je za $k \in -\mathbb{N}$, $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$ in $p_0 = 1$. Iz teorije linearnih homogenih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficient sledi, da je $p_k = A \left(\frac{1-p}{p}\right)^k + B$ za neki realni konstanti A in B . Ker je (npr. iz krepkega zakona velikih števil) $\lim_{k \rightarrow -\infty} p_k = 0$, sledi $B = 0$, in nato zaradi $p_0 = 1$, $A = 1$. To se pravi $p_k = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$.]

3. (25 točk) Naj bo $\{a, \lambda\} \subset (0, \infty)$. Vzporedno potekata neodvisna: homogen Poissonov proces N^h z intenziteto λ ; in nehomogen Poissonov proces N^n s funkcijo intenzitete ρ , $\rho(t) = at$ za $t \in [0, \infty)$. Določi verjetnost, da bo prvi prihod v N^n prišel nič kasneje kot prvi prihod v N^h . Rezultat izrazi s kumulativno porazdelitveno funkcijo Φ standardne normalne porazdelitve.

Rešitev. Če sta S_1^n in S_1^h ta časa, nas zanima $P(S_1^n \leq S_1^h) = P(N_{S_1^h}^n \geq 1) = 1 - P(N_{S_1^h}^n = 0) = 1 - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-as^2/2} ds = 1 - \int_0^\infty \lambda e^{\lambda^2/(2a)} e^{-a(s+\frac{\lambda}{a})^2/2} ds = 1 - \int_{\lambda/\sqrt{a}}^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{a}} e^{\lambda^2/(2a)} e^{-s^2/2} ds = 1 - \lambda \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{\lambda^2}{2a}} \Phi(-\frac{\lambda}{\sqrt{a}})$, kjer smo upoštevali neodvisnost N^n in S_1^h (in Tonellija ipd. reči), ter $N_t^n \sim \text{Pois}(\int_0^t \rho(s) ds = at^2/2)$ za $t \in [0, \infty)$, $S_1^h \sim \text{Exp}(\lambda)$.

4. Naj bo $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $[0, \infty)$, $P(T_1 > 0) > 0$, $E[T_1] < \infty$. Definirajmo $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$ za $n \in \mathbb{N}_0$ (seveda, $S_0 = 0$), ter $N_t := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(S_n \leq t)$ za $t \in [0, \infty)$ – pripadajoči prenovitveni proces. Naprej naj bo $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ Borelovo merljiva, in postavimo $R_t := \int_0^t g(S_{N_s+1} - S_{N_s}) ds$ za $t \in [0, \infty)$. (Prejemamo torej “nagrado” na enoto časa, ki je funkcija g vrzeli procesa N .)
- (a) (20 točk) Določi s.g. $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t/t$, ter tudi $\lim_{t \rightarrow \infty} ER_t/t$.
- (b) (5 točk) Naj bo $a \in [0, \infty)$, in $g = \mathbb{1}_{(a, \infty)}$. Limiti iz točke (a) izrazi eksplicitno s presežno funkcijo $\bar{F}$ slučajne spremenljivke T_1 .

Rešitev. (a). Za $i \in \mathbb{N}$ definirajmo nagrado “ i -te prenovitve” kot $R_i := \int_{S_{i-1}}^{S_i} g(S_i - S_{i-1}) ds = T_i g(T_i)$. Tedaj so R_i , $i \in \mathbb{N}$, n.e.p.; $R_{i+1} \perp \sigma(T_1, \dots, T_i)$ za vse $i \in \mathbb{N}$; in končno je $\sum_{i=1}^{N_t} R_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} R_i$ za vse $t \in [0, \infty)$. Iz izreka o prenovitvah z nagradami tedaj sledi, da sta obe limiti enaki $ER_1/ET_1 = ET_1 g(T_1)/ET_1$. (b). Seveda je $ET_1 = \int_0^\infty \bar{F}(u) du$. Iz istih razlogov je $ER_1 = \int_0^\infty P(T_1 \mathbb{1}_{(a, \infty)}(T_1) > u) du = a\bar{F}(a) + \int_a^\infty \bar{F}(u) du$. Torej sta limiti iz (a) enaki $\int_0^\infty \bar{F}(a \vee x) dx / \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$.