

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

28. junij 2018

1. Naj bo $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Cene je ob času 0 začel poslovati pri natanko dveh bankah. Banka 1 jezi Ceneta ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^1 z intenziteto λ_1 , banka 2 pa jezi Ceneta ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^2 z intenziteto λ_2 . Ko ga prvič ena izmed teh dveh bank ujezi n -krat (tj. ko je prvič $N^1 \geq n$ ali $N^2 \geq n$), prenese vse posle na preostalo izmed teh dveh bank. Ko ga tudi ta prvič ujezi n -krat (tj. ko je prvič $N^1 \geq n$ in $N^2 \geq n$), gre na čisto drugo banko. Banki jezita Ceneta neodvisno ena od druge. (Če ga obe banki ujezita prvič n -tič istočasno, potem gre ob tem času na čisto drugo banko.)
 - (a) (15 točk) Kolikšna je verjetnost, da bo Cene posle prenesel iz banke 1 na banko 2?
 - (b) (10 točk) Naj bo P čas (prvega) prenosa poslov, G pa čas, ko gre Cene na čisto drugo banko (ta časa postavimo na ∞ če do njih sploh ne pride). Koliko je $E[P] + E[G]$?

Rešitev.

[[Verjetnost, da banki Ceneta ujezita istočasno prvič n -krat hkrati je nič. Ravno tako sta s.g. končna P in G .]] N^1 in N^2 si lahko mislimo kot dobljena iz markiranja HPPja N z intenziteto $\lambda_1 + \lambda_2$, markacijama 1 in 2 z verjetnostma $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ in $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Tedaj nas zanima, da bo do n markacij tipa 1 prišlo preden bo prišlo do n markacij tipa 2. Z razbitjem tega dogodka glede na to, da se skupno do prenosa (vključno z prenosom) poslov zgodi natanko $k + n$ markacij, $k = 0, \dots, n - 1$, dobimo da je željena verjetnost enaka

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+n-1}{n-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k.$$

Naprej (v očitnih oznakah) $G = S_n^1 \vee S_n^2$ in $P = S_n^1 \wedge S_n^2$. Torej $E[P] + E[G] = E[P + G] = E[S_n^1 \wedge S_n^2 + S_n^1 \vee S_n^2] = E[S_n^1 + S_n^2] = E[S_n^1] + E[S_n^2]$ in iz znanih porazdelitev (Gamma ...) $= n(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})$.

2. Naj bo $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ Borelovo merljiva in $N \sim \text{PP}(\rho)$.
 - (a) (20 točk) Za $t \in [0, \infty)$, določi $E[\sum_{i=1}^{N_t} g(S_i)]$.
 - (b) (3 točke) Določi še $E[\sum_{i=1}^{N_\infty} g(S_i)]$.
 - (c) (2 točki) Koliko je torej $E[\int g dN]$, kjer integral proti dN interpretiramo v Lebesgue-Stieltjesovem smislu?

(Vse količine izrazi z ustreznimi integrali proti Lebesgueovi meri.)

Rešitev. Naj bo $\Phi(z) := \int_0^z \rho(s)ds$ za $z \in [0, \infty)$. S pogojevanjem in z uporabo vrstilnih statistik dobimo:

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N_t} g(S_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi(t)^k}{k!} e^{-\Phi(t)} k \frac{\int_0^t \rho(u)g(u)du}{\Phi(t)} = \int_0^t g(u)\rho(u)du.$$

Ko pošljemo $t \uparrow \infty$ (npr. čez naravna števila), dobimo iz monotone konvergence $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_\infty} g(S_i)] = \int_0^\infty g(u)\rho(u)du$. Iz definicije Lebesgue-Stieltjesovega integrala sledi, da je $\int g dN = \sum_{i=1}^{N_\infty} g(S_i)$.

3. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$. Proces štetja K naj šteje natanko vse lihe prihode v procesu N . Za $t \in [0, \infty)$ določi $\mathbb{E}[K_t]$. Kako se tvoj odgovor spremeni, če K šteje natanko vse lihe prihode v procesu N od vključno tretjega dalje?

Rešitev. K je prenovitveni proces z zaostankom v katerem ima prvi medprenovitveni čas zakon $\text{Exp}(\lambda) =: dG$, vsi nadaljni pa $\text{Exp}(\lambda) \star \text{Exp}(\lambda) =: dF$. Naj bo M prenovitvena mera procesa K . Tedaj je na ravni Laplace-Stieltjesovih transformirank, na $(0, \infty)$, $\hat{M} = \hat{G}/(1 - \hat{F}) = \hat{G}/(1 - \hat{G}^2)$, viz. $\hat{M}(u) = \frac{\lambda(\lambda+u)}{u(u+2\lambda)} = \frac{\lambda}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{u+2\lambda})$ za $u \in (0, \infty)$. Torej iz linearnosti in injektivnosti Laplace-Stieltjesovih transformirank, $\mathbb{E}K_t = M(t) = \frac{\lambda t}{2} + \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t})$.

Naj L šteje natanko vse lihe prihode v procesu N od vključno tretjega dalje. Potem je $L_t = \sum_{\text{lihi } k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}(S_k \leq t) - \mathbb{1}(S_1 \leq t) = K_t - \mathbb{1}(S_1 \leq t)$, kjer so $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ prihodni časi procesa N . Sledi $\mathbb{E}L_t = \mathbb{E}K_t - \mathbb{P}(S_1 \leq t) = \mathbb{E}K_t - (1 - e^{-\lambda t})$.

4. (25 točk) Naj bo N prenovitveni proces prirejen zaporedju $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e.-s porazdelitveno funkcijo F -p. slučajnih spremenljivk, $\mu := \int s dF(s) \in (0, \infty)$. Označimo z M prenovitveno mero procesa N . Naj bo še $b \in [0, \infty)$. Pokaži, da velja

$$\mathbb{E}[S_{N_b+1} - b]/\mu = \int_{[0,b]} \overline{F}^\star(b-y) dM(y) + \overline{F}^\star(b),$$

kjer je $\overline{F}^\star(z) = 1 - F^\star(z)$ rep zintegriranega repa $F^\star(z) = \int_0^z (1 - F(y))dy/\mu$ porazdelitene funkcije F . **Nasvet.** Najprej izrazi presežno (komplementarno porazdelitveno) funkcijo presežka $S_{N_b+1} - b$, tako da zapišeš konvolucijsko enačbo za $[0, \infty) \ni r \mapsto \mathbb{P}(S_{N_r+1} - r > y)$ pri fiksnem $y \in [0, \infty)$ in jo rešiš.

Rešitev. Naj bo $E := (S_{N_k+1} - k)_{k \in [0, \infty)}$ proces presežkov. Pri fiksnem $y \in [0, \infty)$, je $\mathbb{P}(E > y)$ rešitev $(\overline{F}(y + \cdot), F)$ -konvolucijske enačbe. Sledi (lokalne omejenosti in merljivosti so jasne), da je za $y \in [0, \infty)$, $\mathbb{P}(E_b > y) = \overline{F}(b+y) + \int_{[0,b]} \overline{F}(b+y-z) dM(z)$. Integracija $\int_0^\infty dy$ in Tonelli dasta končni rezultat (po nekaj trivialnih substitucijah in upoštevajoč $\overline{F}^\star(z) = \int_z^\infty \overline{F}(y)dy/\mu$).

[[Alternativno lahko zapišemo prenovitveno enačbo tudi neposredno za funkcijo $g := ([0, \infty) \ni b \mapsto \mathbb{E}[S_{N_b+1} - b])$. Namreč, za $b \in [0, \infty)$ je $g(b) = \mathbb{E}[S_{N_b+1} - b] =$

$\int_{[0,b]} g(b-r) dF(r) + \mathbf{E}[T_1 - b; T_1 > b]$, in $\mathbf{E}[T_1 - b; T_1 > b] = \int_0^\infty \mathbf{P}((T_1 - b) \mathbb{1}_{\{T_1 > b\}} > y) dy = \int_0^\infty \mathbf{P}(T_1 > b + y) dy = \mu \overline{F^*}(b)$. Sedaj sledi trditev neposredno iz izreka o rešitvi prenovitvenih enačb, če lahko utemeljimo, da je g lokalno omejena. Iz zgornjega je sicer a posteriori razvidno, da je to res, ni pa to očitno a priori. Omejimo lahko sicer $E_b \leq T_{N_b+1}$: če so časi T_i omejeni, je torej zagotovo res; v splošnem pa ni tako jasno: T_{N_b+1+1} ima sicer isto porazdelitev kot T_1 , a to ni to kar potrebujemo ...]