

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 3. pisni izpit

Čas pisanja: 90 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

20. avgust 2018

1. Naj bo $\{\gamma, \lambda, t\} \subset (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $D = (D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedje n.e.- $\Gamma(2, \gamma)$ -p. slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $(0, \infty)$, neodvisno od N . Klici prihajajo na telefonsko centralo ob prihodnih časih procesa N ; za $i \in \mathbb{N}$ je i -ti klic aktiven D_i dolgo, nato se konča (ob pričetku je aktiven, ob zaključku ne več). Določi verjetnost, da ob času t ni aktivnih klicev.

Rešitev. S pogojevanjem na N_t je željena verjetnost enaka

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = k) \mathbb{P}(S_1 + D_1 \leq t, \dots, S_k + D_k \leq t | N_t = k).$$

Iz $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$ sledi $\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Naprej, iz lastnosti vrstilnih statistik in vseh relevantnih neodvisnosti sledi, da je za $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(S_1 + D_1 \leq t, \dots, S_k + D_k \leq t | N_t = k) = (\mathbb{P}(U_1 + D_1 \leq t))^k$, kjer je (morda na razširitvi verjetnostnega prostora) $U_1 \sim \text{Unif}([0, t])$, neodvisna od D_1 . [[Podrobnosti. Postavimo $D^k := (D_1, \dots, D_k)$. Iz neodvisnosti, Tonellija, izreka o sliki mere, je $E := \mathbb{P}(S_1 + D_1 \leq t, \dots, S_k + D_k \leq t | N_t = k) = \int \mathbb{P}(S_1 + h_1 \leq t, \dots, S_k + h_k \leq t | N_t = k) \mathbb{P}_{D^k}(dh)$, kar je po lastnosti vrstilnih statistik enako (morda na razširitvi verjetnostnega prostora na katerem najdemo $U_1, \dots, U_k$, n.e.- $\text{Unif}([0, t])$ -p. slučajne spremenljivke, neodvisne od D^k) $\int \mathbb{P}(U_{(1)} + h_1 \leq t, \dots, U_{(k)} + h_k \leq t) \mathbb{P}_{D^k}(dh) = \int \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{P}(\Pi = \pi, U_1 + h_{\pi(1)} \leq t, \dots, U_k + h_{\pi(k)} \leq t) \mathbb{P}_{D^k}(dh) = \sum_{\pi \in S_n} \int \mathbb{P}(\Pi = \pi, U_1 + h_1 \leq t, \dots, U_k + h_k \leq t) \mathbb{P}_{D_{\pi}^k}(dh)$, kjer je Π (slučajna) permutacija, ki ustreza razvrstitvi $U_1, \dots, U_k$ v vrstilne statistike in S_n simetrična grupa reda n . Naprej, ker so slučajne spremenljivke $D_1, \dots, D_k$ n.e.p., je D^k izmenljiv, tj. $\mathbb{P}_{D_{\pi}^k} = \mathbb{P}_{D^k}$ za vse $\pi \in S_n$. Sledi $E = \sum_{\pi \in S_n} \int \mathbb{P}(\Pi = \pi, U_1 + h_1 \leq t, \dots, U_k + h_k \leq t) \mathbb{P}_{D^k}(dh) = \mathbb{P}(U_1 + D_1 \leq t, \dots, U_k + D_k \leq t) = (\mathbb{P}(U_1 + D_1 \leq t))^k$.]] Iskana verjetnost je tedaj enaka

$$e^{-\lambda t(1-I)},$$

kjer je (po Tonelliju, znanih gostotah, neodvisnosti, per partes integraciji ipd.)

$$\begin{aligned} I := \mathbb{P}(U_1 + D_1 \leq t) &= \int_0^t v \gamma^2 e^{-\gamma v} \frac{t-v}{t} dv = \int_0^{\gamma t} u \left(1 - \frac{u}{t\gamma}\right) e^{-u} du \\ &= \frac{2 + \gamma t + (-2 + \gamma t)e^{\gamma t}}{\gamma t} e^{-\gamma t} \\ &= 1 + e^{-\gamma t} - \frac{2}{\gamma t}(1 - e^{-\gamma t}). \end{aligned}$$

2. (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$ in $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ prihodni časi N , $S_0 = 0$. Naj bo T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $[0, \infty)$, neodvisna od N . V odvisnosti od λ in porazdelitve T določi porazdelitvi (npr. porazdelitveni funkciji) E_T ter A_T , kjer je $E_t := S_{N_t+1} - t$ in $A_t := t - S_{N_t}$ za $t \in [0, \infty)$. Ali je lahko $A_T \sim \text{Exp}(\lambda)$? Pod katerimi pogoji na λ in na porazdelitev T pa je A_T porazdeljena eksponentno (česaravno ne s parametrom λ)?

Rešitev. Iz krepke lastnosti Markova je $E_T \sim \text{Exp}(\lambda)$. Naj bo $u \in [0, \infty)$. Tedaj je $\mathbf{P}(A_T \geq u) = \mathbf{P}(N_T - N_{T-u} = 0, u \leq T) = \int \mathbf{P}(N_t - N_{t-u} = 0, u \leq t) dF_T(t) = \int_{[u, \infty)} e^{-\lambda u} dF_T(t) = e^{-\lambda u} dF_T[u, \infty)$, in zato iz zveznosti $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}(A_T > u) = e^{-\lambda u} \mathbf{P}(T > u)$. S tem določimo porazdelitveno funkcijo A_T . $A_T \sim \text{Exp}(\lambda)$ bi impliciralo $\mathbf{P}(T > u) = 1$ za vse $u \in [0, \infty)$, kar je nemogoče (v protislovju s končnostjo T -ja). Če naj bo $A_T \sim \text{Exp}(\mu)$ za nek $\mu \in (0, \infty)$, je to ekvivalentno $\bar{F}_T(u) = e^{-(\mu-\lambda)u}$ za vse $u \in [0, \infty)$. Sledi, da je A_T porazdeljena eksponentno natanko tedaj ko je T porazdeljena eksponentno.

3. Naj bo $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna. Naj bo N Poissonov proces s funkcijo intenzitete ρ . Označimo z $E_t := S_{N_t+1} - t$ presežek ob času $t \in [0, \infty)$.
- (a) (20 točk) Dokaži: Če je $\int_0^\infty \rho(u) du < \infty$, potem je $\mathbf{E}[E_t] = \infty$ za vse $t \in [0, \infty)$.
- (b) (5 točk) Najdi primer za ρ , da bo $\int_0^\infty \rho(u) du = \infty$ in $\mathbf{E}[E_t] = \infty$ za vse $t \in [0, \infty)$.

Rešitev. Ker je $\mathbf{P}(E_t > u) = \mathbf{P}(N_{t+u} - N_t = 0) = e^{-\int_t^{t+u} \rho(v) dv}$, je $\mathbf{E}E_t = \int_0^\infty e^{-\int_t^{t+u} \rho(v) dv} du$. Če je $\int_0^\infty \rho(u) du < \infty$, tedaj je $[0, \infty) \ni u \mapsto e^{-\int_t^{t+u} \rho(v) dv}$ omejena stran od nič. Sledi $\mathbf{E}E_t = \infty$. Za drugi del lahko vzamemo npr. $\rho = 1/(1 + \cdot)$.

4. Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, F porazdelitvena funkcija na $\mathbb{R}$ z $F(0) < 1$, $\mu := \int u dF(u)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Profesor dobiva elektronska sporočila ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa M z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$. Neodvisno se odpravlja na konference ob prenovitvenih trenutkih prenovitvenega procesa N , katerega medprenovitveni trenutki imajo porazdelitveno funkcijo F . Funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo kot sledi: za $t \in [0, \infty)$ naj bo P_t trenutek naslednjega odhoda na konferenco strogo po času t , in naj bo $g(t)$ verjetnost, da bo profesor prejel natanko k elektronskih sporočil v časovnem intervalu $(t, P_t]$; za $t \in (-\infty, 0)$ postavimo $g(t) := 0$.
- (a) (5 točk) Razloži zakaj je za $t \in [0, \infty)$, $g(t) = \mathbf{E} \left[\frac{(\lambda(S_{N_t+1}-t))^k e^{-\lambda(S_{N_t+1}-t)}}{k!} \right]$, kjer so $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prenovitveni trenutki procesa N .
- (b) (10 točk) Določi prenovitveno enačbo za g .
- (c) (10 točk) Naj bo F nearitmetična in $\int u^{k+1} dF(u) < \infty$. Določi $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$. Rezultat izrazi kot ustrezen integral proti Lebesgueovi meri.

Rešitev. Naj bo $t \in [0, \infty)$. Zapišemo lahko, zaradi neodvisnosti M in N , lastnosti HPPjev, ter Tonellija ipd. mersko-teoretičnih reči, $g(t) = \mathbb{P}(M_{S_{N_t+1}} - M_t = k) = \mathbb{E} \frac{(\lambda(S_{N_t+1}-t))^k}{k!} e^{-\lambda(S_{N_t+1}-t)} = \mathbb{E}(\lambda E_t)^k e^{-\lambda E_t} / k!$, kjer je $E_t := S_{N_t+1} - t$ presežek procesa N ob času t .

Prenovitveno enačbo dobimo kot sledi: $g(t) = \mathbb{E}(\lambda E_t)^k e^{-\lambda E_t} / k! = \mathbb{E}[\frac{(\lambda E_t)^k}{k!} e^{-\lambda E_t}; S_1 \leq t] + \mathbb{E}[\frac{(\lambda E_t)^k}{k!} e^{-\lambda E_t}; S_1 > t] = \mathbb{E}[\frac{(\lambda E'_{t-S_1})^k}{k!} e^{-\lambda E'_{t-S_1}}; S_1 \leq t] + \mathbb{E}[\frac{(\lambda(S_1-t))^k}{k!} e^{-\lambda(S_1-t)}; S_1 > t] = \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s) + \int_{(t,\infty)} \frac{(\lambda(u-t))^k}{k!} e^{-\lambda(u-t)} dF(u)$, kjer je $E' = (E'_v)_{v \in [0,\infty)}$ proces presežkov v procesu $N' := N_{S_1+} - 1$ (upoštevamo prenovitveno lastnost, $\sigma(S_1) \perp N' \sim N$ itd. itn.). Če torej definiramo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da postavimo $h(v) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(v) \int_{(v,\infty)} \frac{(\lambda(u-v))^k}{k!} e^{-\lambda(u-v)} dF(u)$ za $v \in \mathbb{R}$, je $g = g \star F + h$, prenovitvena enačba za g .

g je lokalno omejena in Borelovo merljiva. h je zvezna skoraj povsod (npr. iz dominirane konvergence in dejstva, da ima F kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti). Za $v \in [0, \infty)$ velja $0 \leq h(v) \leq \int_{(v,\infty)} \frac{(\lambda u)^k}{k!} dF(u) =: H(v)$. Funkcija H je $\downarrow$ in iz Tonellija integrabilna v izlimitiranem Riemannovem smislu (zaradi predpostavke, da ima dF končen $(k+1)$ -vi moment). Sledi, da je h d.R.i. Smith nam tedaj pove, da je iskana limita enaka

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \int_0^\infty dv \int_{(v,\infty)} \frac{(\lambda(u-v))^k}{k!} e^{-\lambda(u-v)} dF(u) &= (\mu\lambda)^{-1} \int_{(0,\infty)} \int_0^{\lambda u} \frac{v^k}{k!} e^{-v} dv dF(u) \\ &= \mu^{-1} \int_0^\infty \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-\lambda v} \bar{F}(v) dv \end{aligned}$$

(avtomatično je $\mu < \infty$, ker je celo $(k+1)$ -vi moment F po predpostavki končen).