

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 1. kolokvij

Čas pisanja: 70 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

17. april 2018

1. (35 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$, $a \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Slaba banka sodeluje s svetovalnim podjetjem za stike z javnostjo, in sicer naročajo svetovalne storitve ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N z intenziteto λ . Ob času nič ni naročenih nobenih storitev. Svetovalno podjetje prekine sodelovanje s slabo banko, ko prejme k -to naročilo na katero je od prejšnjega (oz. časa nič, če prejšnjih še ni bilo) čakalo vsaj a časa (prvih $(k-1)$ -krat spregledajo; k -tič ne oprostijo več). Naj bo P čas prekinitve sodelovanja med slabo banko in svetovalnim podjetjem. Določi $E[P]$.

Rešitev. Naj bo K število naročil opravljenih do prekinitve sodelovanja (vključno z zadnjim naročilom, ki rezultira v prekinitvi). Če so T_i , $i \in \mathbb{N}$, medprihodni časi Nja, je $P = \sum_{i=1}^K T_i$, in iz Waldove identitete (K je čas ustavljanja glede na naravno filtracijo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ki so n.e.-Exp(λ)-p.), $EP = EKET_1 = \lambda^{-1}EK$. Iz krepke lastnosti Markova za nep zaporedja, via matematična indukcija, je K enak (celo neodvisni) vsoti e.-geom $_{\mathbb{N}}$ ($P(T_1 > a) = e^{-\lambda a}$)-p. slučajnih spremenljivk. Torej je $EK = ke^{\lambda a}$. Končno: $EP = \frac{k}{\lambda}e^{\lambda a}$. [[Mimogrede, če bi želeli upanje časa R , ko podjetje prvič na kako naročilo čaka vsaj a časa, bi imeli $R = \sum_{i=1}^L (T_i \wedge a)$, kjer je L zaporedna številka prvega naročila na katero podjetje čaka vsaj a časa. Seveda je $L \sim \text{geom}_{\mathbb{N}}(e^{-\lambda a})$ in $ER = e^{\lambda a}E[T_1 \wedge a] = e^{\lambda a}(E[T_1; T_1 \leq a] + aP(T_1 > a)) = e^{\lambda a}(\int_0^a ue^{-\lambda u}\lambda du + ae^{-\lambda a}) = (\lambda^{-1}(e^{\lambda a} - \lambda a - 1) + a) = (e^{\lambda a} - 1)/\lambda.$]]

2. Naj bo $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset (0, \infty)$. Banka Primoža spravlja ob živce iz dveh razlogov: (i.) zaradi nesposobnosti, in sicer ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^1 z intenziteto λ_1 ; in, neodvisno, (ii.) zaradi podražitev, ob prihodnih časih homogenega Poissonovega procesa N^2 z intenziteto λ_2 .
- (a) (25 točk) Denimo, da Primož zamenja banko, ko je ta bodisi drugič izkazala nesposobnost, bodisi tretjič podražila neko storitev, katerikoli od teh dveh dogodkov pač pride prej. Določi matematično upanje časa, ko Primož zamenja banko.
- (b) (10 točk) Naj bo $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Isto kot v prejšnji točki, le da “drugič” nadomestimo z “ m -tič”, in “tretjič” z “ n -tič”.

Rešitev. Najprej v splošnem. Brez škode za splošnost naj bo $m \leq n$ (sicer zamenjamo vlogi N^1 in N^2). Markirajmo HPP z intenzivnostjo $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$ na očitni način, da dobimo (v porazdelitvi) N^1 in N^2 . Naj bo K prvi (diskreten) čas, ko smo v zaporedju markacij videli bodisi m enk bodisi n dvojk. Čas zamenjave banke označimo z Z ; $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ naj bo zaporedje medprihodnih časov procesa N . Tedaj

je $Z = \sum_{k=1}^K T_i$. K je neodvisen od T , T je zaporedje n.e.-Exp(λ)-p. nenegativnih slučajnih spremenljivk; iz Walda sledi $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}K\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}K/\lambda$. Naprej, K jemlje vrednosti v $\{m, \dots, m+n-1\}$, in za $k \in \{m, \dots, m+n-1\}$, je

$$\mathbb{P}(K = k) = \binom{k-1}{m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-m} \quad \text{če je } k < n; \text{ in}$$

$$\mathbb{P}(K = k) = \binom{k-1}{m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-m} + \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-n}$$

za $k \geq n$. Torej

$$\begin{aligned} \mathbb{E}K &= \sum_{k=m}^{m+n-1} k \left[\binom{k-1}{m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-m} + \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-n} \right] \\ &= m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^m \sum_{k=m}^{m+n-1} \left[\binom{k}{m} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-m} \right] + n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \sum_{k=n}^{m+n-1} \left[\binom{k}{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k-n} \right]. \end{aligned}$$

Poseben primer, $m = 2$, $n = 3$ (prva točka). Postavimo $\alpha_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\alpha_2 := 1 - \alpha_1$. Potem je $\lambda \mathbb{E}Z = 2\alpha_1^2 + 6\alpha_1^2\alpha_2 + 12\alpha_1^2\alpha_2^2 + 3\alpha_2^3 + 12\alpha_1\alpha_2^3 = \frac{2\lambda_1^3 + 8\lambda_1^2\lambda_2 + 12\lambda_1\lambda_2^2 + 3\lambda_2^3}{(\lambda_1 + \lambda_2)^3}$.

Seveda je tudi (v očitnih oznakah) $Z = S_2^1 \wedge S_3^2$ in lahko postopamo “direktno” (upanje kot integral presežne funkcije ...), brez markacij.

3. (30 točk) Naj bo $\{\lambda, q\} \subset (0, \infty)$, $N \sim \text{HPP}(\lambda)$, $X \sim \text{Exp}(q)$, N neodvisen of X . Določi porazdelitev N_X .

Rešitev. X si lahko mislimo kot prvi prihodni čas neodvisnega HPPja M z intenziteto q . In nato N in M kot dobljena iz markacij HPPja z intenzivnostjo $\lambda + q$. Potem ima $N_X + 1$ porazdelitev zaporedne številke prve markacije “tipa M”, ki je $\text{geom}_{\mathbb{N}}(\frac{q}{q+\lambda})$. Torej $N_X \sim \text{geom}_{\mathbb{N}_0}(\frac{q}{q+\lambda})$.

Seveda lahko računamo tudi “direktno”: za $k \in \mathbb{N}_0$ je v standardnih oznakah, zaradi neodvisnosti X od N , in ker so medprihodni časi N n.e.-Exp(λ)-p., $\mathbb{P}(N_X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq S_k) = \mathbb{E}e^{-qS_k} = (\mathbb{E}e^{-qT_1})^k = (\frac{\lambda}{q+\lambda})^k$ od koder sledi isti rezultat.