

SLUČAJNI PROCESI 1 (FINMAT) — 2. kolokvij

Čas pisanja: 70 min. Zbrati je možno 100 točk.

Vse odgovore/izračune je potrebno utemeljiti. Lahko pišete s svinčnikom.

8. junij 2018

- (40 točk) Naj bo $\{a, b, T, t_0\} \subset (0, \infty)$, $t_0 < T$. Radioaktivni razpad modeliramo z nehomogenim Poissonovim procesom s funkcijo intenzitete ρ , $\rho(t) = ae^{-bt}$ za $t \in [0, \infty)$. Določi verjetnost, da bomo do časa T videli natanko dva prihoda in da bo med njima minilo strogo več kot t_0 časa. Kolikšna pa je verjetnost, da bomo videli sploh samo dva prihoda “do konca časa” in da bo med njima minilo strogo več kot t_0 časa?

Rešitev. Zanima nas $P(N_T = 2, S_2 - S_1 > t_0) = P(N_T = 2)P(S_2 - S_1 > t_0 | N_T = 2)$. Iz lastnosti vrstilnih statistik, je $P(S_2 - S_1 > t_0 | N_T = 2) = P(U_1 \vee U_2 - U_1 \wedge U_2 > t_0)$, kjer sta U_1 in U_2 neodvisni s porazdelitvijo, ki ima gostoto $\mathbb{1}_{[0, T]} \frac{b}{a(1-e^{-bT})} \rho$. Torej, $P(U_1 \vee U_2 - U_1 \wedge U_2 > t_0) = \int_0^T du_1 \int_0^T du_2 \left(\frac{b}{(1-e^{-bT})} \right)^2 e^{-b(u_1+u_2)} \mathbb{1}_{(t_0, \infty)}(u_1 \vee u_2 - u_1 \wedge u_2)$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^T du_1 \int_{(u_1+t_0) \wedge T}^T du_2 \left(\frac{b}{(1-e^{-bT})} \right)^2 e^{-b(u_1+u_2)} \\ &= 2 \int_0^{T-t_0} du_1 b(1-e^{-bT})^{-2} e^{-bu_1} (e^{-b(u_1+t_0)} - e^{-bT}) \\ &= \frac{[e^{-bt_0}(1-e^{-2b(T-t_0)}) - 2e^{-bT}(1-e^{-b(T-t_0)})]}{(1-e^{-bT})^2} \\ &= \frac{e^{-bt_0} [1 + e^{-2b(T-t_0)} - 2e^{-b(T-t_0)}]}{(1-e^{-bT})^2} \\ &= \left(\frac{1 - e^{-b(T-t_0)}}{1 - e^{-bT}} \right)^2 e^{-bt_0}. \end{aligned}$$

Po drugi strani je zaradi $N_T \sim \text{Pois} \left(\int_0^T ae^{-bt} dt = \frac{a}{b}(1-e^{-bT}) \right)$, $P(N_T = 2) = \frac{(\frac{a}{b}(1-e^{-bT}))^2}{2} e^{-\frac{a}{b}(1-e^{-bT})}$. Torej končno

$$P(N_T = 2, S_2 - S_1 > t_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{a(1-e^{-b(T-t_0)})}{b} \right)^2 e^{-\frac{a}{b}(1-e^{-bT})-bt_0}.$$

Iz omejene konvergence ($\mathbb{1}(N_T = 2) \rightarrow \mathbb{1}(N_\infty = 2)$ ko $T \uparrow \infty$) sledi, da je odgovor na drugo vprašanje limita slednjega izraza ko $T \uparrow \infty$ (npr. čez $\mathbb{N}$) $= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 e^{-bt_0 - \frac{a}{b}}$.

- (25 točk) Naj bo $\lambda \in (0, \infty)$. Prenovitveni proces z zaostankom N ima prvi medprenovitveni čas porazdeljen $\Gamma(3, \lambda)$, vse nadaljne pa $\text{Exp}(\lambda)$. Določi njegovo prenovitveno

mero, tj. določi $\mathbf{E}[N_t]$ za $t \in [0, \infty)$.

Rešitev. Lahko z Laplace-Stieltjesovimi ... Sicer pa je to proces N , ki ga dobimo tako da v $M \sim \text{HPP}(\lambda)$ s prihodnimi časi $(S_k)_{k \in \mathbb{M}}$ "pozabimo" šteti 1. in 2. prihod. Torej je za $t \in [0, \infty)$, $N_t = \sum_{k \in \mathbb{N}_{\geq 3}} \mathbb{1}(S_k \leq t) = M_t - \mathbb{1}(S_1 \leq t) - \mathbb{1}(S_2 \leq t)$, od koder $\mathbf{E}N_t = \mathbf{E}M_t - \mathbf{P}(S_1 \leq t) - \mathbf{P}(S_2 \leq t) = \lambda t - \mathbf{P}(M_t \geq 1) - \mathbf{P}(M_t \geq 2) = \lambda t - (1 - \mathbf{P}(M_t = 0)) - (1 - \mathbf{P}(M_t = 0)) - \mathbf{P}(M_t = 1) = \lambda t - (1 - e^{-\lambda t}) - (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) = \lambda t(1 + e^{-\lambda t}) - 2(1 - e^{-\lambda t})$.

3. (35 točk) V življenju se izmenjujejo dobra in slaba obdobja. V dobrih obdobjih je naš trenutni indeks sreče premo sorazmeren času, ki je minil od začetka tekočega dobrega obdobja, sorazmernostna konstanta je $\rho \in (0, \infty)$: če je torej od začetka tekočega dobrega obdobja minilo u časa je naš trenutni indeks sreče tedaj enak ρu . V slabih obdobjih pade naš trenutni indeks sreče na nič. Dolžine dobrih obdobj so n.e.p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v $(0, \infty)$ in končnim upanjem μ_1 ter varianco d . One so neodvisne od dolžin slabih obdobj, ki so ravno tako n.e.p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v $(0, \infty)$ in končnim upanjem μ_2 . Življenje začnemo z dobrim obdobjem. Določi dolgoročni povprečni indeks sreče (s.g. in v upanju), tj. če je za $t \in [0, \infty)$, X_t trenutni indeks sreče, ter $R_t := \int_0^t X_s ds$ kumulativni indeks sreče v trenutku t , potem nas zanimata s.g.- $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t/t$ in $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[R_t]/t$ (v kolikor seveda obstajata).

Rešitev. Naj bodo $(T_i^d)_{i \in \mathbb{N}}$ zaporedne dolžine dobrih obdobj in $(T_i^s)_{i \in \mathbb{N}}$ slabih. Mislimo si lahko prenovitveni proces N z medprenovitvenimi epohami $(T_i := T_i^d + T_i^s)_{i \in \mathbb{N}}$. Če postavimo $Z_i := \int_0^{T_i^d} \rho t dt = \frac{\rho(T_i^d)^2}{2}$, potem je $\sum_{i=1}^{N_t} Z_i \leq R_t \leq \sum_{i=1}^{N_t+1} Z_i$ za vse $t \in [0, \infty)$. Naprej, Z_i , $i \in \mathbb{N}$, so n.e.p., $Z_{i+1} \perp \sigma(T_1, \dots, T_i)$ za vse $i \in \mathbb{N}$ itd. itn. Iz izreka o prenovitvah z nagradami sledi, da sta iskani limiti enaki $\mathbf{E}R_1/\mathbf{E}T_1 = \frac{\rho(d+\mu_1^2)}{2(\mu_1+\mu_2)}$.