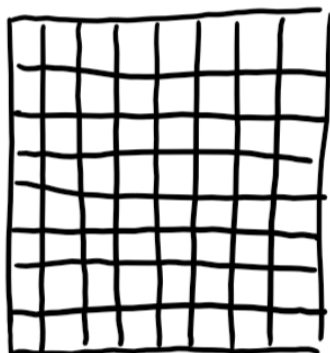


Tenzorji, drugi del

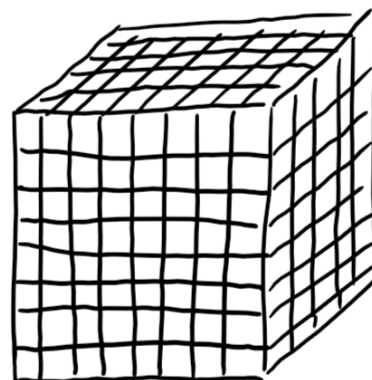
Bor Plestenjak

Matrike so dvodimenzionalne tabele.

Tenzorji so večdimenzionalne tabele.



matrika



tenzor reda 3

Tenzorski produkt

V : končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ z bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$.

V^* : dualni prostor linearnih preslikav $V \rightarrow \mathbb{F}$ z dualno bazo $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, kjer je $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Tenzorski produkt

V : končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ z bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$.

V^* : dualni prostor linearnih preslikav $V \rightarrow \mathbb{F}$ z dualno bazo $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, kjer je $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$.

V in V^* sta izomorfna, pišemo lahko $(V^*)^* = V$.

Tenzorski produkt

V : končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ z bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$.

V^* : dualni prostor linearnih preslikav $V \rightarrow \mathbb{F}$ z dualno bazo $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, kjer je $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$.

V in V^* sta izomorfna, pišemo lahko $(V^*)^* = V$.

Za vektorska prostora V in W definiramo $V \otimes W$ kot prostor vseh elementov

$$\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i$$

za nek k in $v_i \in V$, $w_i \in W$ za $i = 1, \dots, k$. Pri tem za operacijo $\otimes$ velja, da je bilinearna oziroma

- $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$,
- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$,
- $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

Tenzorski produkt

V : končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ z bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$.

V^* : dualni prostor linearnih preslikav $V \rightarrow \mathbb{F}$ z dualno bazo $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, kjer je $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$.

V in V^* sta izomorfna, pišemo lahko $(V^*)^* = V$.

Za vektorska prostora V in W definiramo $V \otimes W$ kot prostor vseh elementov

$$\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i$$

za nek k in $v_i \in V$, $w_i \in W$ za $i = 1, \dots, k$. Pri tem za operacijo $\otimes$ velja, da je bilinearna oziroma

- $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$,
- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$,
- $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

To posplošimo na $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k$. Elementom pravimo tenzorji in pravimo, da ima $z \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k$ **rang r** , če je to najmanjši r , da lahko zapišemo

$$z = \sum_{i=1}^r v_i^{(1)} \otimes \dots \otimes v_i^{(k)}.$$

Multilinearne preslikave

Preslikava $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ je **multilinearna**, če je linearna v vsaki spremenljivki (za vsak faktor V_j) oziroma

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_{i1} + \beta v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

$$= \alpha f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i1}, v_{i+1}, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

za $i = 1, \dots, k$.

Multilinearne preslikave

Preslikava $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ je **multilinearna**, če je linearna v vsaki spremenljivki (za vsak faktor V_j) oziroma

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_{i1} + \beta v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

$$= \alpha f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i1}, v_{i+1}, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

za $i = 1, \dots, k$.

Izrek. Prostor vseh multilinearne preslikav $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ je izomorfen $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$.

Multilinearne preslikave

Preslikava $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ je **multilinearna**, če je linearna v vsaki spremenljivki (za vsak faktor V_j) oziroma

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_{i1} + \beta v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

$$= \alpha f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i1}, v_{i+1}, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i2}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

za $i = 1, \dots, k$.

Izrek. Prostor vseh multilinearnih preslikav $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ je izomorfen $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$.

Če je $e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}$ baza za V_i in $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n_i}^{(i)}$ dualna baza za V_i^* , potem za vsak $f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \rightarrow \mathbb{F}$ definiramo $\beta_{i_1 \dots i_k} = f(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_k}^{(k)})$ in dobimo

$$f(u_1, \dots, u_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \beta_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1}^{(1)}(u_1) \cdots \alpha_{i_k}^{(k)}(u_k),$$

kar lahko povežemo z

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_k} \beta_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i_k}^{(k)} \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$$

in obratno.

Multilinearne preslikave 2

Multilinearno preslikavo $f : (V_1 \times \cdots \times V_k) \times W^* \rightarrow \mathbb{F}$ lahko enačimo z

a) elementom iz $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W$,

b) preslikavo $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \rightarrow W$.

Po eni strani vemo, da f ustreza element oblike

$$\sum_i \alpha_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_i^{(k)} \otimes w_i \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \otimes W$$

in je potem

$$f(u_1, \dots, u_k, \beta) = \sum_i \alpha_i^{(1)}(u_1) \cdots \alpha_i^{(k)}(u_k) w_i(\beta) \in \mathbb{F}$$

To pa pomeni, da lahko pišemo tudi

$$f(u_1, \dots, u_k) = \sum_i \alpha_i^{(1)}(u_1) \cdots \alpha_i^{(k)}(u_k) w_i \in W.$$

Multilinearne preslikave in tenzorji

Multilinearni preslikavi

$$f : V_1^* \times \cdots \times V_p^* \times W_1 \times \cdots \times W_q \rightarrow \mathbb{F}$$

ustreza tenzor

$$A \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \otimes W_1^* \otimes \cdots \otimes W_q^*,$$

ki ga predstavimo s $p+q$ razsežno matriko oz. **tenzorjem** $\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{n_1 \times \cdots \times n_p \times m_1 \times \cdots \times m_q}$ z elementi

$$a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Pravimo, da so indeksi $i_1, \dots, i_p$ **kontravariantni**, indeksi $j_1, \dots, j_q$ pa **kovariantni**.

Tenzor $\mathcal{A}$ je **reda** $p + q$ in **tipa** (p, q) .

Einsteinov sumacijski predpis

Po Einsteinovem sumacijskem predpisu v vsotah izpuščamo znak za vsoto, če seštevamo po indeksu, ki se pojavi v kontravarianti in kovariantni kombinaciji. Npr.

$$\sum_{i=1}^n a^i b_i = a^i b_i,$$

pri čemer naredimo vsoto po vseh možnih vrednostih indeksa i .

Einsteinov sumacijski predpis

Po Einsteinovem sumacijskem predpisu v vsotah izpuščamo znak za vsoto, če seštevamo po indeksu, ki se pojavi v kontravarianti in kovariantni kombinaciji. Npr.

$$\sum_{i=1}^n a^i b_i = a^i b_i,$$

pri čemer naredimo vsoto po vseh možnih vrednostih indeksa i .

Če imamo standardno bazo $e_1, \dots, e_n$ za vektorski prostor V , potem za $x \in V$ velja $x = x^i e_i$ in komponente vektorjev pišemo s kontravariantnimi indeksi.

Linearna preslikava in bilinearna forma

Linearna preslikava $f : V \rightarrow W$ je v bistvu preslikava iz $V \times W^* \rightarrow \mathbb{F}$, ki ji ustreza element iz $V^* \otimes W$. Torej dobimo tenzor reda 2 tipa $(1, 1)$.

Če je $f(x) = y$, to pišemo kar kot $y^i = a_k^i x^k$. Če je dimenzija V enaka n in dimenzija W enaka m , preslikavi ustreza matrika (tenzor) velikosti $m \times n$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}$$

in velja $y = f(x) = Ax$.

Linearna preslikava in bilinearna forma

Linearna preslikava $f : V \rightarrow W$ je v bistvu preslikava iz $V \times W^* \rightarrow \mathbb{F}$, ki ji ustreza element iz $V^* \otimes W$. Torej dobimo tenzor **reda 2 tipa (1, 1)**.

Če je $f(x) = y$, to pišemo kar kot $y^i = a_k^i x^k$. Če je dimenzija V enaka n in dimenzija W enaka m , preslikavi ustreza matrika (tenzor) velikosti $m \times n$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}$$

in velja $y = f(x) = Ax$.

Bilinearni formi $f : V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ ustreza element iz $V^* \otimes W^*$. V tem primeru dobimo tenzor **reda 2 tipa (0, 2)**, oba indeksa sta kovariantna. Pišemo lahko $f(x, y) = a_{ik} x^i y^k$. Temu ustreza matrika (tenzor) velikosti $m \times n$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

in velja $f(x, y) = y^T Ax$.

Linearna preslikava in bilinearna forma

Linearna preslikava $f : V \rightarrow W$ je v bistvu preslikava iz $V \times W^* \rightarrow \mathbb{F}$, ki ji ustreza element iz $V^* \otimes W$. Torej dobimo tenzor **reda 2 tipa (1, 1)**.

Če je $f(x) = y$, to pišemo kar kot $y^i = a_k^i x^k$. Če je dimenzija V enaka n in dimenzija W enaka m , preslikavi ustreza matrika (tenzor) velikosti $m \times n$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}$$

in velja $y = f(x) = Ax$.

Bilinearni formi $f : V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ ustreza element iz $V^* \otimes W^*$. V tem primeru dobimo tenzor **reda 2 tipa (0, 2)**, oba indeksa sta kovariantna. Pišemo lahko $f(x, y) = a_{ik} x^i y^k$. Temu ustreza matrika (tenzor) velikosti $m \times n$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

in velja $f(x, y) = y^T Ax$.

Tako linearni preslikavi $V \rightarrow W$ kot bilinearni formi $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ torej ustreza matrika velikosti $m \times n$.

Sprememba baze ter kontravariantni in kovariantni indeksi

Tako linearni preslikavi $V \rightarrow W$ kot bilinearni preslikavi $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ ustreza matrika velikosti $m \times n$.

Linearna preslikava: $y = f(x) = Ax$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Denimo, da sta P in Q nesingularni matriki velikosti $n \times n$ in $m \times m$ in velja $x = P\tilde{x}$ in $y = Q\tilde{y}$.

Za linearno preslikavo iz $y = Ax$ sledi $Q\tilde{y} = AP\tilde{y}$, torej $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$ za $\tilde{A} = Q^{-1}AP$.

Sprememba baze ter kontravariantni in kovariantni indeksi

Tako linearni preslikavi $V \rightarrow W$ kot bilinearni preslikavi $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ ustreza matrika velikosti $m \times n$.

Linearna preslikava: $y = f(x) = Ax$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Denimo, da sta P in Q nesingularni matriki velikosti $n \times n$ in $m \times m$ in velja $x = P\tilde{x}$ in $y = Q\tilde{y}$.

Za linearno preslikavo iz $y = Ax$ sledi $Q\tilde{y} = AP\tilde{y}$, torej $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$ za $\tilde{A} = Q^{-1}AP$.

Bilinearna forma: $f(x, y) = y^T Ax$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Sedaj pri spremembi baz dobimo $y^T Ax = \tilde{y}^T \tilde{A}\tilde{x}$ za $\tilde{A} = Q^T AP$.

Sprememba baze ter kontravariantni in kovariantni indeksi

Tako linearni preslikavi $V \rightarrow W$ kot bilinearni preslikavi $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ ustreza matrika velikosti $m \times n$.

Linearna preslikava: $y = f(x) = Ax$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Denimo, da sta P in Q nesingularni matriki velikosti $n \times n$ in $m \times m$ in velja $x = P\tilde{x}$ in $y = Q\tilde{y}$.

Za linearno preslikavo iz $y = Ax$ sledi $Q\tilde{y} = AP\tilde{y}$, torej $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x}$ za $\tilde{A} = Q^{-1}AP$.

Bilinearna forma: $f(x, y) = y^T Ax$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Sedaj pri spremembi baz dobimo $y^T Ax = \tilde{y}^T \tilde{A}\tilde{x}$ za $\tilde{A} = Q^T AP$.

Opazimo:

- pri kovariantnih indeksih nastopa matrika spremembe baze,
- pri kontravariantnih indeksih pa njen inverz.

Tenzorji nizkega reda

red	tip	pomen
0	$(0,0)$	skalar
1	$(1,0)$	vektor
1	$(0,1)$	kovektor oz. linearni funkcional
2	$(2,0)$	bivektor
2	$(1,1)$	linearna preslikava
2	$(0,2)$	bilinearna forma
d	$(0,d)$	d -linearna forma

Hitro matrično množenje

Če za izračun produkta dveh matrik velikosti $n \times n$ porabimo $\mathcal{O}(n^\alpha)$ osnovnih operacij, kjer je $\alpha < 3$, govorimo o hitrem matričnem množenju.

Primeri:

- Strassen (1969): $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) = \mathcal{O}(n^{2.81})$,
- Coppersmith-Winograd (1987): $\mathcal{O}(n^{2.376})$,
- Le Gall (2014): $\mathcal{O}(n^{2.373})$.

Strassenovo množenje

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Klasično množenje

$$M_1 = A_{11} \cdot B_{11}$$

$$M_2 = A_{12} \cdot B_{21}$$

$$M_3 = A_{11} \cdot B_{12}$$

$$M_4 = A_{12} \cdot B_{22}$$

$$M_5 = A_{21} \cdot B_{11}$$

$$M_6 = A_{22} \cdot B_{21}$$

$$M_7 = A_{21} \cdot B_{12}$$

$$M_8 = A_{22} \cdot B_{22}$$

$$C_{11} = M_1 + M_2$$

$$C_{12} = M_3 + M_4$$

$$C_{21} = M_5 + M_6$$

$$C_{22} = M_7 + M_8$$

Strassenovo množenje

$$N_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$N_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$N_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$N_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$N_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$N_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$N_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = N_1 + N_4 - N_5 + N_7$$

$$C_{12} = N_3 + N_5$$

$$C_{21} = N_2 + N_4$$

$$C_{22} = N_1 - N_2 + N_3 + N_6$$

Strassenovo množenje

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Klasično množenje

$$M_1 = A_{11} \cdot B_{11}$$

$$M_2 = A_{12} \cdot B_{21}$$

$$M_3 = A_{11} \cdot B_{12}$$

$$M_4 = A_{12} \cdot B_{22}$$

$$M_5 = A_{21} \cdot B_{11}$$

$$M_6 = A_{22} \cdot B_{21}$$

$$M_7 = A_{21} \cdot B_{12}$$

$$M_8 = A_{22} \cdot B_{22}$$

$$C_{11} = M_1 + M_2$$

$$C_{12} = M_3 + M_4$$

$$C_{21} = M_5 + M_6$$

$$C_{22} = M_7 + M_8$$

Strassenovo množenje

$$N_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$N_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$N_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$N_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$N_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$N_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$N_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = N_1 + N_4 - N_5 + N_7$$

$$C_{12} = N_3 + N_5$$

$$C_{21} = N_2 + N_4$$

$$C_{22} = N_1 - N_2 + N_3 + N_6$$

Za $n \times n$ matriko uporabimo rekurziven postopek, za zahtevnost velja $T(n) = 7T(n/2) + \mathcal{O}(n^2)$ in $T(1) = 1$

Strassenovo množenje

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Klasično množenje

$$M_1 = A_{11} \cdot B_{11}$$

$$M_2 = A_{12} \cdot B_{21}$$

$$M_3 = A_{11} \cdot B_{12}$$

$$M_4 = A_{12} \cdot B_{22}$$

$$M_5 = A_{21} \cdot B_{11}$$

$$M_6 = A_{22} \cdot B_{21}$$

$$M_7 = A_{21} \cdot B_{12}$$

$$M_8 = A_{22} \cdot B_{22}$$

$$C_{11} = M_1 + M_2$$

$$C_{12} = M_3 + M_4$$

$$C_{21} = M_5 + M_6$$

$$C_{22} = M_7 + M_8$$

Strassenovo množenje

$$N_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$N_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$N_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$N_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$N_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$N_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$N_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = N_1 + N_4 - N_5 + N_7$$

$$C_{12} = N_3 + N_5$$

$$C_{21} = N_2 + N_4$$

$$C_{22} = N_1 - N_2 + N_3 + N_6$$

Za $n \times n$ matriko uporabimo rekurziven postopek, za zahtevnost velja $T(n) = 7T(n/2) + \mathcal{O}(n^2)$ in $T(1) = 1$, sledi $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 7}) = \mathcal{O}(n^{2.81})$.

Povezava s tenzorji

Množenje matrik 2×2 lahko predstavimo s tenzorjem velikosti $4 \times 4 \times 4$.

Za bazo izberimo

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Potem lahko $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ pišemo kot $A = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$.

Povezava s tenzorji

Množenje matrik 2×2 lahko predstavimo s tenzorjem velikosti $4 \times 4 \times 4$.

Za bazo izberimo

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Potem lahko $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ pišemo kot $A = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$.

Če je $\mathcal{T}$ tenzor $4 \times 4 \times 4$, kjer je $t_{ijk} = 1$ natanko tedaj, ko je $e_i \cdot e_j = e_k$, sicer pa so vsi ostali elementi enaki 0, potem je

$$\mathcal{T} \times_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \times_2 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

tenzor velikosti $1 \times 1 \times 4$ s cevjo $[c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}]$.

Povezava s tenzorji

Množenje matrik 2×2 lahko predstavimo s tenzorjem velikosti $4 \times 4 \times 4$.

Za bazo izberimo

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Potem lahko $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ pišemo kot $A = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$.

Če je $\mathcal{T}$ tenzor $4 \times 4 \times 4$, kjer je $t_{ijk} = 1$ natanko tedaj, ko je $e_i \cdot e_j = e_k$, sicer pa so vsi ostali elementi enaki 0, potem je

$$\mathcal{T} \times_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \times_2 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

tenzor velikosti $1 \times 1 \times 4$ s cevjo $[c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}]$.

Rezine $\mathcal{T}$ so

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rang tenzorja $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ je očitno vsota 8 tenzorjev ranga 1. Tako izračunamo C z 8 množenji.

Rang tenzorja $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ je očitno vsota 8 tenzorjev ranga 1. Tako izračunamo C z 8 množenji.

Toda, $\text{rang}(\mathcal{T}) = 7$, saj je $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^7 u_i \circ v_i \circ w_i$, kjer so u_i, v_i, w_i stolpci matrik

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rang tenzorja $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ je očitno vsota 8 tenzorjev ranga 1. Tako izračunamo C z 8 množenji.

Toda, $\text{rang}(\mathcal{T}) = 7$, saj je $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^7 u_i \circ v_i \circ w_i$, kjer so u_i, v_i, w_i stolpci matrik

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$N_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$N_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$N_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$N_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$N_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$N_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = N_1 + N_4 - N_5 + N_7$$

$$C_{12} = N_3 + N_5$$

$$C_{21} = N_2 + N_4$$

$$C_{22} = N_1 - N_2 + N_3 + N_6$$

		N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
U	A_{11}	1		1		1	-1	
	A_{12}					1		1
	A_{21}		1				1	
	A_{22}	1	1		1			-1
V	B_{11}	1	1		-1		1	
	B_{12}			1			1	
	B_{21}				1			1
	B_{22}	1		-1		1		1
W	C_{11}	1			1	-1		1
	C_{12}			1		1		
	C_{21}		1		1			
	C_{22}	1	-1	1			1	

Rang tenzorja $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ je očitno vsota 8 tenzorjev ranga 1. Tako izračunamo C z 8 množenji.

Toda, $\text{rang}(\mathcal{T}) = 7$, saj je $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^7 u_i \circ v_i \circ w_i$, kjer so u_i, v_i, w_i stolpci matrik

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$N_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$N_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$N_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$N_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$N_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$N_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = N_1 + N_4 - N_5 + N_7$$

$$C_{12} = N_3 + N_5$$

$$C_{21} = N_2 + N_4$$

$$C_{22} = N_1 - N_2 + N_3 + N_6$$

		N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
U	A_{11}	1		1		1	-1	
	A_{12}					1		1
	A_{21}		1				1	
	A_{22}	1	1		1			-1
V	B_{11}	1	1		-1		1	
	B_{12}			1			1	
	B_{21}				1			1
	B_{22}	1		-1		1		1
W	C_{11}	1			1	-1		1
	C_{12}			1		1		
	C_{21}		1		1			
	C_{22}	1	-1	1			1	

Če je $\mathcal{T}$ vsota r tenzorjev ranga 1, torej potrebujemo le r matričnih množenj.

Posplošitve

Če množimo matriki velikosti 3×3 , dobimo tenzor $\mathcal{M}$ velikosti $9 \times 9 \times 9$.

Klasičen način potrebuje 27 množenj $\Rightarrow$ zahtevnost je $\mathcal{O}(n^{\log_3 27}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Ni znano, kakšen je točen rang tenzorja $\mathcal{M}$, ve se, da je

$$19 \leq \text{rang}(\mathcal{M}) \leq 23.$$

Posplošitve

Če množimo matriki velikosti 3×3 , dobimo tenzor $\mathcal{M}$ velikosti $9 \times 9 \times 9$.

Klasičen način potrebuje 27 množenj $\Rightarrow$ zahtevnost je $\mathcal{O}(n^{\log_3 27}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Ni znano, kakšen je točen rang tenzorja $\mathcal{M}$, ve se, da je

$$19 \leq \text{rang}(\mathcal{M}) \leq 23.$$

Benson in Ballard (2015) sta s pomočjo zapisa ranga 23 dobila algoritem z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 23}) = \mathcal{O}(n^{2.85})$.

Posplošitve

Če množimo matriki velikosti 3×3 , dobimo tenzor $\mathcal{M}$ velikosti $9 \times 9 \times 9$.

Klasičen način potrebuje 27 množenj $\Rightarrow$ zahtevnost je $\mathcal{O}(n^{\log_3 27}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Ni znano, kakšen je točen rang tenzorja $\mathcal{M}$, ve se, da je

$$19 \leq \text{rang}(\mathcal{M}) \leq 23.$$

Benson in Ballard (2015) sta s pomočjo zapisa ranga 23 dobila algoritem z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 23}) = \mathcal{O}(n^{2.85})$.

Schönhage (1981) je našel asimptotično predstavitev ranga 21, ki vodi do asimptotičnega algoritma z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 21}) = \mathcal{O}(n^{2.77})$.

Posplošitve

Če množimo matriki velikosti 3×3 , dobimo tenzor $\mathcal{M}$ velikosti $9 \times 9 \times 9$.

Klasičen način potrebuje 27 množenj $\Rightarrow$ zahtevnost je $\mathcal{O}(n^{\log_3 27}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Ni znano, kakšen je točen rang tenzorja $\mathcal{M}$, ve se, da je

$$19 \leq \text{rang}(\mathcal{M}) \leq 23.$$

Benson in Ballard (2015) sta s pomočjo zapisa ranga 23 dobila algoritem z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 23}) = \mathcal{O}(n^{2.85})$.

Schönhage (1981) je našel asimptotično predstavitev ranga 21, ki vodi do asimptotičnega algoritma z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 21}) = \mathcal{O}(n^{2.77})$.

Uporabljamo lahko tudi pravokotne bloke. Oznaka $\langle M, N, P \rangle$ pomeni, da vzamemo v A podmatriko $M \times P$, jo množimo z podmatriko $P \times N$ v B in tako dobimo podmatriko $M \times N$ v C . Tako pridemo do še boljših zahtevnosti, npr:

- Benson, Ballard (2015), za $\langle 3, 3, 4 \rangle$ dovolj 29 (sicer 36) množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.82})$
- Smirnov (2017): za $\langle 3, 4, 4 \rangle$ je dovolj 38 namesto 48 množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.82})$
- Smirnov (2013): za $\langle 3, 3, 6 \rangle$ je dovolj 40 namesto 54 množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.77})$

Posplošitve

Če množimo matriki velikosti 3×3 , dobimo tenzor $\mathcal{M}$ velikosti $9 \times 9 \times 9$.

Klasičen način potrebuje 27 množenj $\Rightarrow$ zahtevnost je $\mathcal{O}(n^{\log_3 27}) = \mathcal{O}(n^3)$.

Ni znano, kakšen je točen rang tenzorja $\mathcal{M}$, ve se, da je

$$19 \leq \text{rang}(\mathcal{M}) \leq 23.$$

Benson in Ballard (2015) sta s pomočjo zapisa ranga 23 dobila algoritem z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 23}) = \mathcal{O}(n^{2.85})$.

Schönhage (1981) je našel asimptotično predstavitev ranga 21, ki vodi do asimptotičnega algoritma z zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^{\log_3 21}) = \mathcal{O}(n^{2.77})$.

Uporabljamo lahko tudi pravokotne bloke. Oznaka $\langle M, N, P \rangle$ pomeni, da vzamemo v A podmatriko $M \times P$, jo množimo z podmatriko $P \times N$ v B in tako dobimo podmatriko $M \times N$ v C . Tako pridemo do še boljših zahtevnosti, npr:

- Benson, Ballard (2015), za $\langle 3, 3, 4 \rangle$ dovolj 29 (sicer 36) množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.82})$
- Smirnov (2017): za $\langle 3, 4, 4 \rangle$ je dovolj 38 namesto 48 množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.82})$
- Smirnov (2013): za $\langle 3, 3, 6 \rangle$ je dovolj 40 namesto 54 množenj $\Rightarrow \mathcal{O}(n^{2.77})$

Za $\langle 4, 4, 4 \rangle$ ni znano, ali zadošča manj kot 49 množenj (dvojni Strassen).