

Logika in množice, 1. izpit

3. februar 2021

1. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Za izjavni izraz

$$\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow r),$$

kjer so p , q in r izjavne spremenljivke, dokažite, da je tautologija.

b) (15 točk) Za izjavno formulo

$$(\exists u, v \in A. u \neq v) \wedge (\forall z \in A. L(z, z)) \Rightarrow (\exists x, y \in A. L(x, y)),$$

kjer je A množica in L dvomestni predikat, dokažite, da je logično veljavna.

2. naloga (25 točk)

Dokažite, da sta naslednji izjavi ekvivalentni za vsako množico A .

1. Množica $\mathcal{P}(A)$ je linearno urejena z inkluzijo $\subseteq$.
2. Relacija enakosti id_A je univerzalna relacija na množici A .

3. naloga (25 točk)

Dokažite, da je množica vseh polinomov z racionalnimi koeficienti števna, množica vseh polinomov z realnimi koeficienti pa neštevna.

4. naloga (25 točk)

Naj bo A množica. Množico vseh delnih urejenosti na A označimo s $\text{PO}(A)$. Naslednjih dveh dejstev ni treba dokazovati, pač pa ju lahko uporabite pri reševanju naloge:

- množica $\text{PO}(A)$ je delno urejena z inkluzijo $\subseteq$,
- če je $\sqsubseteq$ delna urejenost na A in za elementa $a, b \in A$ **ne** velja $b \sqsubseteq a$, potem je tudi

$$\{(x, y) \in A \times A \mid x \sqsubseteq y \vee (x \sqsubseteq a \wedge b \sqsubseteq y)\}$$

delna urejenost na A .

a) (20 točk) Za vse $R \in \text{PO}(A)$ dokažite, da sta ekvivalentni naslednji trditvi.

1. R je linearna urejenost.
2. R je maksimalni element v $(\text{PO}(A), \subseteq)$.

b) (5 točk) Dokažite, da je vsako delno urejenost na A možno razširiti do linearne urejenosti na A .

Pripomba. Če podnaloge a) ne znate rešiti, lahko njen rezultat kljub vsemu uporabite v rešitvi podnaloge b).