

Logika in množice, 3. izpit

27. avgust 2021

1. naloga (25 točk)

Izjavni veznik V naj bo dan z naslednjo resničnostno tabelo.

p	q	r	$V(p, q, r)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

a) (15 točk) Izrazite veznik V z običajnimi vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Dobljeni izraz čim bolj poenostavite. Za polno število točk naj končna oblika vsebuje samo dva nastopa naštetih običajnih veznikov.

b) (10 točk) Dokažite, da $\{V\}$ ni poln nabor, $\{V, \neg\}$ pa je poln nabor izjavnih veznikov.

2. naloga (25 točk)

a) (5 točk) Izračunajte $\bigcup \bigcup (\emptyset \times \{1, 2\})$.

b) (10 točk) Izračunajte $\bigcup \bigcup (\{0\} \times \{1, 2\})$.

c) (10 točk) Naj bosta A in B množici. Dokažite, da velja

$$\bigcup \bigcup (A \times B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{če } A = \emptyset \vee B = \emptyset, \\ A \cup B, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Spomnimo: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$, kjer $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

3. naloga (25 točk)

Naj bosta A in B množici. Naj B^A označuje množico vseh preslikav $A \rightarrow B$. Dokažite:

$$A \prec B \implies A \prec B^A.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo A množica in $f: A \rightarrow A$ preslikava. Z f^n označimo n -kratno kompozicijo funkcije f , torej $f^0 = \text{id}_A$ in $f^{n+1} = f \circ f^n$. Relacija R na množici A naj bo definirana kot

$$x R y \iff \exists n \in \mathbb{N}. y = f^n(x)$$

za $x, y \in A$.

a) (5 točk) Preverite, da je R refleksivna in tranzitivna relacija.

b) (10 točk) Dokažite: relacija R je ekvivalenčna natanko tedaj, ko velja

$$\forall z \in A. \exists d \in \mathbb{N}. d \geq 1 \wedge f^d(z) = z.$$

c) (10 točk) Dokažite: če f nima negibnih točk in je R delna urejenost, potem je množica A prazna ali neskončna.

Namig za (b) in (c). Za vsak $k \in \mathbb{N}$ in $a \in A$ velja $f^k(a) R f^{k+1}(a)$.