

Logika in množice, 1. izpit

2. februar 2022

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih izjav ugotovite, ali je resnična. Odgovorov ni treba utemeljevati. Če ne veste, pustite neodgovorjeno, saj se napačni odgovori (razen prvega) štejejo negativno.

$\forall x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE
$\forall x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \wedge x = y^2))$	DA	NE
$\exists x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \wedge \forall y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE
$\exists x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \wedge \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \wedge x = y^2))$	DA	NE
$\forall x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE
$\forall x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \wedge \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \wedge x = y^2))$	DA	NE
$\exists x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE
$\exists x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \wedge \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE
$\exists x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \wedge x = y^2))$	DA	NE
$\forall x \in \mathbb{R}. (x \geq 0 \wedge \exists y \in \mathbb{R}. (y \geq 0 \Rightarrow x = y^2))$	DA	NE

2. naloga (25 točk)

Pravimo, da je množica A **podenojlec**, kadar velja $\forall x, y \in A. x = y$.

a) (10 točk) Podajte podenojca, ki *nista* izomorfna.

b) (15 točk) Dokazite, da je množica A podenojlec natanko tedaj, ko je A^A enojec.

3. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiramo relacijo $\prec$ s predpisom

$$f \prec g : \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}. f(n) < g(n).$$

Odgovorite na naslednja vprašanja in odgovore utemeljite.

a) (9 točk) Ali je $\prec$ stroga urejenost (irefleksivna in tranzitivna)?

b) (8 točk) Ali je $\prec$ stroga linearna urejenost?

c) (8 točk) Ali je $\prec$ dobro osnovana?

4. naloga (30 točk)

Na potenčni množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$X \sim Y :\iff X \oplus Y \text{ je končna,}$$

pri čemer je $X \oplus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ simetrična razlika podmnožic $X, Y \subseteq \mathbb{N}$.

a) (10 točk) Preverite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

b) (10 točk) Dokažite, da je kvocient $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ neštevna množica.

c) (10 točk) Dokažite $|\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.