

Logika in množice, izpit

8. april 2022

1. naloga (30 točk)

Dan naj bo izjavni veznik $V(p, q, r) := p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge r$.

a) (10 točk) Izpolnite resničnostno tabelo za veznik V .

p	q	r	
$\top$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\perp$	
$\top$	$\perp$	$\top$	
$\top$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	
$\perp$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	

b) (10 točk) Podajte disjunktivno normalno obliko za veznik V .

c) (10 točk) Preverite, da je $V(p, q, p) \Leftrightarrow \neg q$ tautologija.

2. naloga (20 točk)

a) (10 točk) Naj bo T množica in $S \subseteq T$. Preverite, da velja $T \cong S + (T \setminus S)$.

b) (10 točk) Naj bo $f: A \rightarrow B$ injektivna. Poiščite tako množico X , da velja $B \cong A + X$.

3. naloga (25 točk)

Na množici realnih zaporedij $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiramo relacijo $\sim$:

$$a \sim b := \exists n \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{N}. k \geq n \Rightarrow a_k = b_k.$$

Z besedami, $a \sim b$ pomeni, da se zaporedji a in b od nekega člena naprej ujemata.

a) (10 točk) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) (15 točk) Vsoto zaporedij definiramo po komponentah, tj. $(a + b)_n := a_n + b_n$. Nato definiramo “vsoto” ekvivalenčnih razredov zaporedij s predpisom

$$[a]_{\sim} \oplus [b]_{\sim} := [a + b]_{\sim}.$$

Preverite, da je operacija $\oplus: \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ dobro definirana.

4. naloga (25 točk)

Za preslikavo f rečemo, da je **strogo monotona**, kadar za vse x, y iz domene velja $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Množice $\mathbb{N}$, $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$ opremimo z običajno urejenostjo, množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ pa z njo porojeno leksikografsko urejenostjo.

a) (5 točk) Podajte strogo monotono preslikavo $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$.

b) (10 točk) Podajte strogo monotono preslikavo $h: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

c) (10 točk) Dokažite, da ne obstaja strogo monotona preslikava $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.