

Logika in množice, 2. kolokvij

2. julij 2021

1. naloga (25 točk)

Naj bo V tromestni izjavni veznik, definiran kot $V(p, q, r) := (p + q) \Rightarrow r$.

a) (10 točk) Zapišite resničnostno tabelo veznika V .

b) (5 točk) Ali je $\{V\}$ poln nabor izjavnih veznikov? Odgovor utemeljite.

c) (10 točk) Ali je naslednji sklep veljaven? Če je, ga dokažite, če ne, pa podajte protiprimer.

$$V(p, q, q), \neg q \models \neg p$$

2. naloga (25 točk)

Na množici $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$z \sim w \iff \frac{z}{w} \in \mathbb{R}.$$

a) (15 točk) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na P .

b) (10 točk) Dokažite, da je naslednja preslikava dobro definirana:

$$\begin{aligned} f: P/\sim &\rightarrow (0, \pi) \\ [z]_\sim &\mapsto \arg(z) \end{aligned}$$

Spomnimo: $\arg(z)$ označuje argument kompleksnega števila z , tj. kot iz polarnega zapisa kompleksnega števila z .

3. naloga (25 točk)

Dokažite, da sta naslednji množici neštevnii.

a) (10 točk) Množica vseh zaporedij racionalnih števil $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

b) (15 točk) Množica vseh padajočih Cauchyjevih zaporedij racionalnih števil $\text{PC}_{\mathbb{Q}}$.

Spomnimo: zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je Cauchyjevo, kadar za vsako pozitivno realno število ϵ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \in \mathbb{N}$, ki so večji od N , velja $|a_m - a_n| < \epsilon$.

4. naloga (25 točk)

Za preslikavo $f: A \rightarrow B$ med delnima urejenostma $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ rečemo, da je

- **monotona**, kadar velja $\forall x, y \in A. (x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y))$,
- **vložitev delnih urejenosti**, kadar velja $\forall x, y \in A. (x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y))$.

Naj bo $(X, \leq)$ delna urejenost in naj bo potenčna množica $\mathcal{P}(X)$ delno urejena z $\subseteq$. Preslikava $I: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ naj bo definirana kot $I(x) := \{z \in X \mid z \leq x\}$.

a) (10 točk) Preverite, da je I vložitev delnih urejenosti.

b) (15 točk) Dokazite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni.

1. Vsaka podmnožica množice X ima supremum v $(X, \leq)$.
2. Obstaja monotona preslikava $s: \mathcal{P}(X) \rightarrow X$, za katero velja $s \circ I = \text{id}_X$.