

Logika in množice: 1. izpit

9. februar 2010

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno.

1. naloga (6 × 5 točk)

Vsako od danih formul poveži z njenim pomenom.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \exists m \in \mathbb{N}. n = 2m \quad (1)$$

(a) Obstaja sodo naravno število.

$$n = 2m \quad (2)$$

(b) Vsa naravna števila so soda.

$$\exists n \in \mathbb{N}. \exists m \in \mathbb{N}. n = 2m \quad (3)$$

(c) Obstaja naravno število, ki ni sodo.

$$\exists n \in \mathbb{N}. \neg \exists m \in \mathbb{N}. n = 2m \quad (4)$$

(d) Naravno število n je sodo.

$$\exists m \in \mathbb{N}. n = 2m \quad (5)$$

(e) Število n je dvakratnik števila m .

$$\forall n \in \mathbb{N}. \neg \exists m \in \mathbb{N}. n = 2m \quad (6)$$

(f) Nobeno naravno število ni sodo.

2. naloga (25 točk)

V Peanovi aritmetiki sestavi dokaz izjave

$$\forall n \in \mathbb{N}. n = 0 \vee n = 0^+ \vee \exists m \in \mathbb{N}. n = (m^+)^+.$$

Dokaz je lahko napisan v slovenščini, a mora biti podroben. Uporabiti smeš samo Peanove aksiome, ki se glasijo:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{n^+ \neq 0} & \overline{\frac{m^+ = n^+}{m = n}} & \overline{0 + n = n} & \overline{m^+ + n = (m + n)^+} & \overline{0 \cdot n = 0} \\ & \overline{m^+ \cdot n = m \cdot n + n} & & \overline{\frac{\phi(0) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \phi(m) \Rightarrow \phi(m^+)}{\forall n \in \mathbb{N}. \phi(n)}} & \end{array}$$

3. naloga (4 × 10 točk)

Naj bo n naravno število in $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiramo množici

$$A = \{T \subseteq S \mid |T| = 0 \vee |T| = 3\},$$
$$B = \{T \subseteq S \mid |T| = 1 \vee |T| = 2\}.$$

Povedano z besedami, A vsebuje tiste podmnožice S , ki imajo 0 ali 3 elemente, in B vsebuje tiste podmnožice S , ki imajo 1 ali 2 elementa.

- a) Koliko elementov ima množica A ?
- b) Koliko elementov ima množica B ?
- c) Za katere vrednosti n imata A in B enako število elementov?
- d) Za katere vrednosti n ima A manj elementov kot B ?

4. naloga (25 točk)

Na potenčni množici realnih števil $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiramo relacijo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$A \sqsubseteq B \iff (\forall x \in A. \exists y \in B. x \leq y) \wedge (\forall y \in B. \exists x \in A. x \leq y).$$

- a) Ali je $\sqsubseteq$ refleksivna relacija?
- b) Ali je $\sqsubseteq$ tranzitivna relacija?
- c) Ali je $\sqsubseteq$ antisimetrična relacija?

5. naloga (za čast in slavo)

Katerih je več, zveznih realnih funkcij ali odvedljivih realnih funkcij?