

Logika in množice: 2. izpit

18. februar 2010

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno.

1. naloga (25 točk)

Vsako od naslednjih formul poveži z njenim pomenom, pri čemer je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana realna funkcija.

$$\exists x \in \mathbb{R}. \forall y \in \mathbb{R}. f(y) < x \quad (1)$$

(a) Število x je (stroga) zgornja meja funkcije f .

$$\forall y \in \mathbb{R}. f(y) < x \quad (2)$$

(b) Število $f(y)$ je manjše od vseh realnih števil.

$$\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. f(y) < x \quad (3)$$

(c) Funkcija f nima spodnje meje.

$$\forall x \in \mathbb{R}. f(y) < x \quad (4)$$

(d) Funkcija f nima zgornje meje.

$$\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. x < f(y) \quad (5)$$

(e) Funkcija f ima (strogo) zgornjo mejo.

2. naloga (25 + 10 točk)

a) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\exists x \in S. \phi(x)) \Rightarrow \neg \forall x \in S. \neg \phi(x).$$

b) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\neg \forall x \in S. \neg \phi(x)) \Rightarrow \exists x \in S. \phi(x).$$

3. naloga (15 + 15 točk)

Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ sta dani ekvivalenčni relaciji $\sim$ in $\approx$, za kateri velja

$$\forall m, n \in \mathbb{N}. m \sim n \Rightarrow m \approx n.$$

Naj bo $A = \mathbb{N}/\sim$ kvocientna množica $\mathbb{N}$ glede na $\sim$ in $B = \mathbb{N}/\approx$ kvocientna množica $\mathbb{N}$ glede na $\approx$. Vsako od naslednjih trditev bodisi dokaži bodisi podaj protiprimer (primerno izbrani $\sim$ in $\approx$, za kateri trditev ne velja):

a) $|A| \leq |B|$ (moč množice A je manjša ali enaka moči množice B),

b) $|B| \leq |A|$ (moč množice B je manjša ali enaka moči množice A).

4. naloga (10 + 10 + 10 točk)

Preslikavo $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo s predpisom

$$f(S) = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in S. n \leq m\}.$$

- a) Dokaži, da za vse $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ velja $f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$.
- b) Poišči taki množici $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, za kateri **ne velja** $f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$.
- c) Izračunaj zalogo vrednosti preslikave $f \circ f$.

5. naloga (za čast in slavo)

Množico $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uredimo z relacijo $\sqsubset$, definirano s predpisom

$$f \sqsubset g \iff \exists n \in \mathbb{N}. f(n) < g(n) \wedge \forall k < n. f(k) = g(k).$$

Poišči preslikavo $I : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $\forall f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. f \sqsubset g \iff I(f) < I(g)$.