

Logika in množice: 3. izpit

30. junij 2010

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno.

1. naloga (6 × 5 točk)

Vsako od danih formul poveži z njenim pomenom, pri čemer sta A in B množici. (Več formul ima lahko isti pomen.)

$$\exists x . x \in A \wedge x \in B \quad (1)$$

(a) A je podmnožica B

$$\forall x . x \in A \Rightarrow x \in B \quad (2)$$

(b) A ni podmnožica B

$$\forall x . x \notin A \vee x \notin B \quad (3)$$

(c) A in B sta disjunktni.

$$\exists x . x \in A \wedge x \in B \quad (4)$$

(d) A in B nista disjunktni.

$$\exists x . x \in A \wedge x \notin B \quad (5)$$

$$\forall x . x \in A \Rightarrow x \notin B \quad (6)$$

2. naloga (25 točk)

V Peanovi aritmetiki sestavi dokaz izjave

$$\forall k, m, n \in \mathbb{N} . k + m = k + n \Rightarrow m = n .$$

Dokaz je lahko napisan v slovenščini, a mora biti podroben. Uporabiti smeš samo Peanove aksiome, ki se glasijo:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{n^+ \neq 0} & \overline{m^+ = n^+} & \overline{0 + n = n} & \overline{m^+ + n = (m + n)^+} & \overline{0 \cdot n = 0} \\ & \overline{m = n} & & & \\ & & \overline{m^+ \cdot n = m \cdot n + n} & \overline{\phi(0)} & \overline{\forall m \in \mathbb{N} . \phi(m) \Rightarrow \phi(m^+)} \\ & & & \overline{\forall n \in \mathbb{N} . \phi(n)} & \end{array}$$

3. naloga (25 točk)

Na množici realnih zaporedij $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$a R b \iff \exists n \in \mathbb{N} . \forall m \in \mathbb{N} . m \geq n \Rightarrow a_m \leq b_m .$$

a) Ali je relacija R refleksivna?

b) Ali je relacija R tranzitivna?

c) Ali je relacija R antisimetrična?

4. naloga (25 točk)

Za naravno število $n \in \mathbb{N}$ definiramo množico $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiramo naslednje množice:

$$\begin{array}{llll} A = [2] + [3], & B = [2] \times [3], & C = [3] + \mathbb{N}, & D = [2] \times \mathbb{N}, \\ E = [3] \times \mathbb{N}, & F = \mathbb{N}^{[3]}, & G = [2]^{\mathbb{N}}, & H = [3]^{\mathbb{N}}. \end{array}$$

- a) Katere izmed množic $A, B, \dots, H$ imajo moč manjšo od $\aleph_0$?
- b) Katere izmed množic $A, B, \dots, H$ imajo moč enako $\aleph_0$?
- c) Katere izmed množic $A, B, \dots, H$ imajo moč večjo od $\aleph_0$?

5. naloga (čast in slava)

Ali obstaja taka družina množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da je njen presek $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ prazen, hkrati pa je za vsak $m \in \mathbb{N}$ presek $\bigcap_{0 \leq n \leq m} A_n$ neskočen?