

Logika in množice: 4. izpit

15. september 2010

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno.

1. naloga (5 × 5 točk)

Vsako od spodnjih izjav poveži z njenim pomenom, pri čemer sta f in g funkciji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. f(x) = g(y) \quad (1)$$

(a) slika f vsebuje sliko g

$$\forall x \in \mathbb{R}. g(f(x)) = x \quad (2)$$

(b) slika g vsebuje sliko f

$$\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. g(x) = f(y) \quad (3)$$

(c) f in g nista enaki funkciji

$$\forall x \in \mathbb{R}. \forall y \in \mathbb{R}. f(x) \neq g(y) \quad (4)$$

(d) g je levi inverz f

$$\exists x \in \mathbb{R}. f(x) \neq g(x) \quad (5)$$

(e) slika f in slika g sta disjunktni

Nauk: slika funkcije f je množica $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}. f(x) = y\}$.

2. naloga (25 točk)

Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\exists x \in A. \forall y \in B. \phi(x, y)) \Rightarrow \forall v \in B. \exists u \in A. \phi(u, v).$$

3. naloga (30 točk)

Na množici funkcij $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$f R g \iff \exists \epsilon > 0. \forall x \in \mathbb{R}. |x| < \epsilon \Rightarrow f(x) = g(x).$$

a) Podaj primer funkcij f in g , za kateri velja $f \neq g$ in $f R g$.

b) Ali je R ekvivalenčna relacija?

4. naloga (30 točk)

Dana je preslikava $f : A \rightarrow B$. Naj bo $h : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definirana s predpisom

$$h(S) = \{x \in A \mid f(x) \in S\}.$$

Dokaži, da je f injektivna natanko tedaj, ko je h surjektivna.