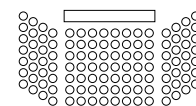


Logika in množice: 2. izpit

16. maj 2013

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dana naj bo funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ter naslednje izjave in možni pomeni:

- | | |
|---|--|
| 1) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = y$ | a) resnična izjava za vse funkcije f |
| 2) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$ | b) neresnična izjava za vse funkcije f |
| 3) $\exists y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$ | c) funkcija f je surjektivna |
| 4) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$ | d) funkcija f ni surjektivna |
| 5) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall x' \in \mathbb{R} : f(x) \neq f(x')$ | e) funkcija f je injektivna |
| 6) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ | f) funkcija f ni injektivna |
| 7) $\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ | g) funkcija f je konstantna |
| 8) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall x' \in \mathbb{R} : f(x) = f(x')$ | h) funkcija f je konstantno enaka y |

Vsaki izjavi pripišite ustrezeni pomen. Pozor: isti pomen lahko ustreza več izjavam.

- | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) |
|----|----|----|----|----|----|----|----|

2. naloga (25 točk)

Če je sklep veljaven, ga dokažite s sklepom, sicer pa ga ovrzite s protiprimerom.

a) $p \vee q, (p \wedge q) \Rightarrow r, \neg(r \vee s) \Rightarrow \neg p \models q \vee r$

b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p), (q \Rightarrow r) \Rightarrow q, (p \wedge r) \Rightarrow (p \vee r) \models q$

3. naloga (25 + 5 točk)

Na množici polinomov z realnimi koeficienti definiramo relacijo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$p \sqsubseteq q \iff p = q \vee \exists n \in \mathbb{N}_0 : (p(n) < q(n) \wedge \forall m \in \mathbb{N}_0 : (m < n \Rightarrow p(m) = q(m))).$$

Torej: če se p in q razlikujeta, obstaja naravno število n , v katerem p zavzame manjšo vrednost kot q , v vseh naravnih številih m , ki so manjša od n , pa p in q zavzameta enako vrednost.

a) Dokazite, da je $\sqsubseteq$ delna urejenost.

b) Zapišite tabelo, iz katere se za vsak par polinomov $p, q \in \{0, x-1, x, x+1, x^2, x^2-x, -x^2+x\}$ vidi, če velja $p \sqsubseteq q$. Namesto tabele lahko narišete tudi Hassejev diagram.

c) Ali je $\sqsubseteq$ linearna urejenost?

d) (+5 točk) Poiščite $\inf \{\prod_{i=0}^n (x-i) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

4. naloga (25 točk)

Z $\mathcal{Z}$ označimo množico vseh kompleksnih zaporedij $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Definirajmo $\psi: \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Z})$, ki podmnožico $U \subseteq \mathbb{C}$ slika v podmnožico vseh zaporedij, ki v celoti ležijo v U . Torej:

$$\psi(U) = \{\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z} \mid \forall i \in \mathbb{N}. z_i \in U\}.$$

a) Dokazite, da je funkcija ψ injektivna.

b) Vzemimo kompleksno število z in naj bo $\mathcal{K}$ družina vseh podmnožic K iz zaloge vrednosti funkcije ψ , ki vsebujejo konstantno zaporedje $\{z\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dokazite, da velja

$$\bigcap_{K \in \mathcal{K}} \psi^{-1}(K) = \{z\},$$

pri čemer je $\psi^{-1}: \mathcal{P}[\mathcal{P}(\mathbb{C})] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C})$ inverz preslikave ψ .