

Logika in množice: 3. izpit

6. september 2013

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dana naj bosta funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in število $a \in \mathbb{R}$ ter naslednje izjave in možni pomeni:

- | | |
|--|---|
| 1) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) - f(a) < \varepsilon$ | a) funkcija f je neomejena |
| 2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : f(x - a) = \varepsilon$ | b) neresnična izjava za vse funkcije f in števila a |
| 3) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f(x) - f(a) > \varepsilon$ | c) funkcija $ f $ je omejena |
| 4) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f(x - a) > \varepsilon$ | d) funkcija f ima ničlo |
| 5) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f(x) - f(a) < \varepsilon$ | e) resnična izjava za vse funkcije f in števila a |
| 6) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : f(x - a) = \varepsilon$ | f) funkcija $ f $ je konstantna in neničelna |
| 7) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) - f(a) > \varepsilon$ | g) funkcija f nima ničle |
| 8) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f(x - a) < \varepsilon$ | h) funkcija f je omejena |

Vsaki izjavi pripišite ustrezeni pomen. Pozor: isti pomen lahko ustreza več izjavam.

2. naloga (25 točk)

Če je sklep veljaven, ga dokažite, sicer pa ga ovrzite s protiprimerom.

- a) $p \vee q \Rightarrow r, p \vee r \Rightarrow s, p \vee s \Rightarrow t, p \vee t \Rightarrow q \models \neg(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow t)$
- b) $p_1 \Rightarrow q_1 \wedge p_2, p_2 \Rightarrow q_2 \wedge p_3, p_3 \Rightarrow q_3 \wedge p_4, p_3 \wedge q_3 \Rightarrow \neg q_2, p_2 \wedge q_2 \Rightarrow \neg q_1, p_4 \Rightarrow q_3 \models \neg p_3$

3. naloga (25)

Na množici vseh realnih zaporedij $\{a_n\}_n$ definiramo relacijo R s predpisom

$$\{a_n\}_n R \{b_n\}_n \iff \liminf\{a_n\}_n = \liminf\{b_n\}_n \wedge \limsup\{a_n\}_n = \limsup\{b_n\}_n.$$

- a) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.
- b) Kaj je ekvivalenčni razred zaporedja $\{(-1)^n n\}_n$?
- c) Poiščite množico zaporedij, ki vsebuje po natanko en element iz vsakega razreda relacije R .

4. naloga (25 točk)

Poiščite tako množico A in relacijo $R \subseteq A \times A$, da velja

$$\forall x, y, z \in A : x R y \wedge y R z \Rightarrow z R x,$$

hkrati pa R ni tranzitivna.