

Logika in množice: 1. izpit

6. februar 2014

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Vsako od naslednjih štirih trditev o naravnih številih **prevedi** v naravni jezik in zanjo **ugotovi**, ali je resnična.

- a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$
- b) $\forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x \leq y$
- c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$
- d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \leq y$

Naslednje trditve prevedi¹ v jezik predikatnega računa (pazi na postavljanje oklepajev):

- e) Nobeno naravno število ni manjše od samega sebe.
- f) Za poljubna tri naravna števila velja: če je prvo število manjše od drugega in je drugo število manjše od tretjega, potem je tudi prvo število manjše od tretjega.
- g) Za poljubni dve naravni števili velja: če je prvo število manjše od drugega, potem drugo število ni manjše od prvega.

2. naloga (25 točk)

Če je sklep veljaven, ga dokaži, sicer ga ovrzi s protiprimerom.

- a) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, p \vee r \models q \wedge s$
- b) $p \vee q \Rightarrow r, r \Rightarrow s \vee t, t \Rightarrow u, \neg(s \vee u) \models \neg p$
- c) $p \Rightarrow q, \neg q \vee r, s \vee r \Rightarrow p \models p \Leftrightarrow r$

3. naloga (25 točk)

Dana je množica $A = \{a, b, c\}$ in dvomestna relacija

$$R = \{(a, c), (b, b), (b, c), (c, a)\}$$

na elementih množice A .

- a) Izračunaj R^3 .
- b) Izračunaj R^{2014} .
- c) Izračunaj R^+ .
- d) Izračunaj $R \circ R^{-1}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo A poljubna množica, $(I, \leq)$ poljubna delno urejena množica in $f : A \rightarrow I$ poljubna preslikava. Na množici A vpeljemo relacijo

$$x \leq_f y \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \leq f(y).$$

Dokaži, da je $\leq_f$ relacija delne urejenosti natanko tedaj, ko je f injektivna.

¹tokrat ugotavljanje resničnosti ni potrebno

Logic and Sets: First Exam

February 6, 2014

You have 120 minutes to complete your solutions. Justify your answers. Good luck!

Problem 1 (25 points)

Translate the following four statements about natural numbers into natural language and **determine** which of them are true.

- a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \leq y$
- b) $\forall y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x \leq y$
- c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$
- d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \leq y$

Translate² the following statements into the language of predicate calculus (be careful with parentheses):

- e) No natural number is less than itself.
- f) For any three natural numbers, if the first number is less than the second and the second number is less than the third, then the first number is less than the third.
- g) For any two natural numbers, if the first number is less than the second, then the second number is not less than the first.

Problem 2 (25 points)

If the inference is valid, prove it, otherwise construct a counterexample.

- a) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, p \vee r \models q \wedge s$
- b) $p \vee q \Rightarrow r, r \Rightarrow s \vee t, t \Rightarrow u, \neg(s \vee u) \models \neg p$
- c) $p \Rightarrow q, \neg q \vee r, s \vee r \Rightarrow p \models p \Leftrightarrow r$

Problem 3 (25 points)

The set $A = \{a, b, c\}$ and the binary relation

$$R = \{(a, c), (b, b), (b, c), (c, a)\}$$

on the elements of A are given.

- a) Compute R^3 .
- b) Compute R^{2014} .
- c) Compute R^+ .
- d) Compute $R \circ R^{-1}$.

Problem 4 (25 points)

Let A be an arbitrary set, $(I, \leq)$ an arbitrary partially ordered set and $f : A \rightarrow I$ an arbitrary mapping. We define the following relation on the set A :

$$x \leq_f y \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \leq f(y).$$

Prove that $\leq_f$ is a partial order if and only if f is injective.

²this time you don't need to determine which statements are true