

Logika in množice: 1. izpit

4. februar 2015

Čas reševanja je 120 minut. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Za vsako od spodaj naštetih funkcij označite, ali je monomorfizem in ali je epimorfizem. Odgovorov vam ni treba utemeljiti.

a) $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(x) = |x|$

b) $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(x) = 0$

c) $f_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_3(x) = |x|$

d) $f_4: \emptyset \rightarrow \mathbb{N}, f_4(x) = 0$

e) $f_5: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f_5(x) = |x|$

f) $f_6: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_6(x) = |x|$

g) $f_7: \emptyset \rightarrow \emptyset, f_7(x) = x$

2. naloga (25 točk)

Peanovim aksiomom za naravna števila dodamo relacijo $\sqsubseteq$ in aksioma

$$\forall k \in \mathbb{N}. 0 \sqsubseteq k, \quad (1)$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}. m \sqsubseteq n \Rightarrow m^+ \sqsubseteq n^+. \quad (2)$$

Dokažite, da velja

$$\forall u, v \in \mathbb{N}. u \sqsubseteq v + u.$$

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Dokažite, da za poljubno množico A ter izjavi ϕ in ψ velja

$$(\forall x, y \in A. \phi(x, y) \Leftrightarrow (\exists z \in A. \psi(x, z) \wedge \psi(z, y))) \implies ((\exists u \in A. \psi(u, u)) \Rightarrow \exists v \in A. \phi(v, v)).$$

b) (10 točk) Poiščite množico A ter izjavi ϕ in ψ , za katere je izjava

$$(\forall x, y \in A. \phi(x, y) \Leftrightarrow (\exists z \in A. \psi(x, z) \wedge \psi(z, y))) \implies ((\exists v \in A. \phi(v, v)) \Rightarrow \exists u \in A. \psi(u, u))$$

neresnična!

4. naloga (25 točk)

Ali obstaja taka *neštevna* množica I in družina $(X_i)_{i \in I}$, da je $X_i \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *neštevna* podmnožica ravnine za vsak $i \in I$ in da je $X_i \cap X_j$ *števno neskončna* podmnožica za vse $i, j \in I, i \neq j$?