

Logika in množice: 2. izpit

7. maj 2015

Čas reševanja je 120 minut. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Za vsako od naslednjih množic ugotovite, ali je končna, števno neskončna ali neštevna. Odgovorov ni treba utemeljevati.

- a) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
- b) $\mathbb{N} + \mathbb{Q}$
- c) $\{\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$
- d) $\mathbb{N} + \mathbb{R}$
- e) $\emptyset \times \mathbb{R}$

2. naloga (25 točk)

Dokažite, da za vsako množico X velja $\mathcal{P}(X + X) \cong \{0, 1, 2, 3\}^X$.

3. naloga (25 točk)

Dokažite, da velja

$$(\exists x \in A . \forall y \in B . \neg \phi(x, y)) \implies \neg(\exists f \in B^A . \forall u \in A . \phi(u, f(u)))$$

4. naloga (25 točk)

Na množici $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo relacijo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$X \sqsubseteq Y \iff \exists f \in Y^X . \forall x \in X . x < f(x).$$

- a) (9 točk) Dokažite, da $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubseteq)$ ni delno urejena množica.
- b) (8 točk) Poiščite družino $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podmnožic $X_n \subseteq \mathbb{N}$, da je $X_n \sqsubseteq X_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- c) (8 točk) Poiščite družino $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podmnožic $X_n \subseteq \mathbb{N}$, da je $X_{n+1} \sqsubseteq X_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.