

Logika in množice: 3. izpit

24. avgust 2015

Čas reševanja je 120 minut. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Za vsako od izjav ugotovite, ali je resnična. Odgovorov ni treba utemeljiti.

a) (5 točk) $\forall k \in \mathbb{Z}. \exists x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. x + k = n$

b) (5 točk) $\exists x \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{Z}. \exists n \in \mathbb{N}. x + k = n$

c) (5 točk) $\exists n \in \mathbb{N}. \exists x \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{Z}. k + n = x$

d) (5 točk) $\forall x \in \mathbb{R}. \exists n \in \mathbb{N}. \exists k \in \mathbb{Z}. k + n = x$

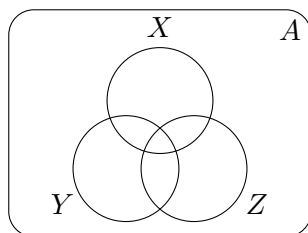
e) (5 točk) $\forall n \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{Z}. \exists x \in \mathbb{R}. x + n = k$

2. naloga (25 točk)

Dana naj bo množica A . Za podmnožice $X, Y, Z \subseteq A$ definiramo

$$\Psi(X, Y, Z) = \{a \in A \mid a \in X \cap Y \vee a \in Y \cap Z \vee a \in Z \cap X\}.$$

a) (5 točk) Na sliki označite množico $\Psi(X, Y, Z)$.



b) (10 točk) Dokazite, da za poljubne množice $W, X, Y, Z \subseteq A$ velja

$$W \cup \Psi(X, Y, Z) = \Psi(W \cup X, W \cup Y, Z).$$

c) (10 točk) Dokazite, da enakost

$$f_*(\Psi(X, Y, Z)) = \Psi(f_*(X), f_*(Y), f_*(Z))$$

ne velja za vse množice A in $X, Y, Z \subseteq A$ in vse funkcije $f: A \rightarrow A$.

3. naloga (25 točk)

Na naravnih številih je dana relacija $\preceq$, ki zadošča lastnostim:

1. $\forall x \in \mathbb{N}. x \preceq x$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}. x \preceq y \Rightarrow x \preceq y^+$,
3. $\forall x, y \in \mathbb{N}. x \preceq 0 \Rightarrow x = 0$,
4. $\forall x, y \in \mathbb{N}. x \preceq y^+ \Rightarrow (x = y^+ \vee x \preceq y)$.

a) (15 točk) Dokazite, da je $\preceq$ tranzitivna relacija.

Namig: da velja $a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$ za vse $a, b, c \in \mathbb{N}$, dokazite z indukcijo po c .

b) (10 točk) Dokazite, da velja $\forall u, v \in \mathbb{N}. u^+ \preceq v^+ \Rightarrow u \preceq v$.

Namig: tokrat indukcije ne boste potrebovali.

4. naloga (25 točk)

Za naravno število $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Definirajmo še množici

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} [n] \quad \text{in} \quad B = \prod_{n \in \mathbb{N}} [n].$$

a) (10 točk) Poiščite monomorfizem $f: A \rightarrow B$ ali utemeljite, da ne obstaja.

b) (10 točk) Poiščite epimorfizem $g: A \rightarrow B$ ali utemeljite, da ne obstaja.

c) (5 točk) Primerjajte moči množic A in B .