

Logika in množice, 1. izpit

30. januar 2019

1. naloga (25 točk)

Za celi števili m in n naj bo $m \mid n$ okrajšava za formulo $\exists k \in \mathbb{Z}. k \cdot m = n$. Obravnavamo logične formule

- (a) $a \mid b \Rightarrow a \mid b$
- (b) $a \mid b \Rightarrow b \mid a$
- (c) $\exists b, c \in \mathbb{Z}. (b \mid a) \wedge (c \mid a)$
- (d) $\forall a \in \mathbb{Z}. \exists b, c \in \mathbb{Z}. b \neq c \wedge (b \mid a) \wedge (c \mid a)$
- (e) $\forall a \in \mathbb{Z}. \exists b, c \in \mathbb{Z}. b \neq c \wedge (a \mid b) \wedge (a \mid c)$
- (f) $\exists b, c \in \mathbb{Z}. b \neq c \wedge (b \mid a) \wedge (c \mid a)$
- (g) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}. b \neq c \Rightarrow (b \mid a) \wedge (c \mid a)$
- (h) $\forall a, b \in \mathbb{Z}. \exists c \in \mathbb{Z}. (c \mid a) \wedge (c \mid b)$

in naslednje matematične izjave, ki se nanašajo na cela števila:

- (1) Vsako število ima vsaj dva različna delitelja.
- (2) Število a ima vsaj dva različna delitelja.
- (3) Vsaki številici imata skupni delitelj.
- (4) Vsako število ima vsaj dva različna večkratnika.
- (5) Če je a delitelj b , potem je b večkratnik a .

Za vsako izjavo dopišite črko ob tisti formuli, ki ima enak pomen kot izjava:

(1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____ (5) _____

Odgovorov ni treba utemeljevati.

2. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$a \sim b \iff a = b \vee a + b = 0.$$

Relacija $\sim$ je ekvivalenčna, česar ni treba preverjati.

a) (5 točk) Izračunajte ekvivalenčni razred $[2019]_{\sim}$.

b) (10 točk) Zapišite množico predstavnikov ekvivalenčnih razredov za $\sim$, se pravi tako podmnožico $S \subseteq \mathbb{R}$, ki vsebuje natanko en element iz vsakega ekvivalenčnega razreda.

c) (10 točk) Ali je preslikava $f : \mathbb{R}/\sim \times \mathbb{R}/\sim \rightarrow [-1, 1]$, podana s predpisom

$$f([x], [y]) := \cos(x + y),$$

dobro definirana?

3. naloga (25 točk)

Množico $\mathbb{N}$ uredimo z običajno relacijo $\leq$, množico $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pa z relacijo

$$f \sqsubseteq g \iff \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq g(n).$$

Dokažite, da je preslikava $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$H(f) := \max \{k \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}. n \leq k \Rightarrow k \leq f(n)\},$$

monotona.

4. naloga (25 točk)

Dokažite, da velja $|\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$.