

Logika in množice, 3. izpit

30. avgust 2019

1. naloga (25 točk)

Naj bo A neprazna množica, P izjavna spremenljivka in Q predikat na A . Dokažite

$$\left(\exists x \in A. P \Rightarrow Q(x) \right) \Leftrightarrow \left(P \Rightarrow \exists y \in A. Q(y) \right).$$

2. naloga (25 točk)

Naj bosta A in B množici ter $S \subseteq A \times B$ podmnožica njunega produkta. Za vsak $a \in A$ in $b \in B$ definiramo

$$\begin{aligned} \text{navpičnica}(a) &:= \{(x, y) \in S \mid x = a\}, \\ \text{vodoravnica}(b) &:= \{(x, y) \in S \mid y = b\}. \end{aligned}$$

Dokažite

$$\bigcup_{a \in A} \text{navpičnica}(a) = \bigcup_{b \in B} \text{vodoravnica}(b).$$

3. naloga (25 točk)

a) (5 točk) Poiščite take množice A, B, C in D , da **ne** velja

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies |B^A| \leq |D^C|.$$

b) (20 točk) Dokažite, da za vse množice A, B, C in D velja

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies |B^A| \leq |D^C|,$$

če je D neprazna množica.

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk)

Dokažite, da obstaja ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}$ z naslednjo lastnostjo:

- vsak ekvivalenčni razred ima minimum (glede na običajno urejenost $\leq$) in ta minimum je edino **celo** število v tem ekvivalenčnem razredu.

b) (15 točk)

Dokažite, da obstaja ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}$ z naslednjo lastnostjo:

- vsak ekvivalenčni razred ima minimum (glede na običajno urejenost $\leq$) in ta minimum je edino **racionalno** število v tem ekvivalenčnem razredu.