

Logika in množice, 1. izpit

29. januar 2020

1. naloga (25 točk)

Naj bo $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Na množici A definiramo delno urejenost $\leq$, ki vsebuje pare $(a, b), (a, c), (b, c), (d, c), (e, c), (f, c), (f, e), (g, c), (g, e)$.

a) (15 točk) Narišite Hassejev diagram te delne urejenosti.

b) (5 točk) Določite minimalne in maksimalne elemente množice A .

c) (5 točk) Ali obstajata supremum in infimum podmnožice $\{f, g\}$? Če da, ju zapišite.

2. naloga (25 točk)

Naj bo A množica ter P in Q predikata na $A \times A$. Dokažite

$$(\forall a, b \in A. P(a, b) \vee \exists c \in A. Q(a, c)) \wedge (\forall d \in A. \neg P(d, d)) \Rightarrow \forall x \in A. \exists y \in A. Q(x, y).$$

3. naloga (25 točk)

Za vsako surjekcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiramo preslikavo $\tilde{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s predpisom

$$\tilde{f}(n) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid f(k) = n\}.$$

a) (7 točk) Dokažite, da je 0 v zalogi vrednosti $\tilde{f}$ za vsako surjekcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

b) (8 točk) Dokažite, da je $\tilde{f}$ injektivna za vsako surjekcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

c) (10 točk) Denimo, da je $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektivna in da je 0 v njeni zalogi vrednosti. Dokažite, da obstaja taka surjekcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, da je $\tilde{f} = g$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo S neprazna množica, za katero velja $|S| = |S + S|$. Dokažite, da velja

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))| = |\mathcal{P}(S)^{\mathcal{P}(S)}|.$$

Namig: najprej dokažite $|\mathbf{2}^S| = |S \times \mathbf{2}^S|$.