

Logika in množice, 2. izpit

16. junij 2020

1. naloga (25 točk)

Naj bo P množica vseh premic v ravnini. Izjavo " p in q sta vzporedni" zapišemo s $p \parallel q$, izjavo " p in q sta pravokotni" pa zapišemo s $p \perp q$. Obravnavajmo naslednje izjave in formule:

- | | |
|--|--|
| 1) Vsaka premica je pravokotna na neko premico. | a) $\forall p \in P. \forall q \in P. p \perp q \wedge \neg(p \parallel q)$ |
| 2) Neka premica je pravokotna na vse premice. | b) $\exists p \in P. \exists q \in P. p \perp q \wedge \neg(p \parallel q)$ |
| 3) Obstajata pravokotni premici, ki sta vzporedni. | c) $\forall p \in P. \exists q \in P. p \perp q$ |
| 4) Nobena premica ni vzporedna premici q . | č) $\forall p \in P. \neg(p \parallel q)$ |
| 5) Pravokotni premici nista vzporedni. | d) $\neg \forall p \in P. \neg(p \parallel q)$ |
| | e) $\exists p \in P. \forall q \in P. p \perp q$ |
| | f) $\exists p \in P. \exists q \in P. p \perp q \Rightarrow p \parallel q$ |
| | g) $\forall p \in P. \forall q \in P. p \perp q \Rightarrow \neg(p \parallel q)$ |

Vsaki izjavi pripišite črko ob formuli, ki ima enak pomen, kot izjava:

- 1) 2) 3) 4) 5)

2. naloga (25 točk)

Z (a, b) označimo odprti interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ na realni osi. Definiramo

$$A = \bigcap_{t \in (0,1)} (t, \frac{1}{t}) \quad \text{in} \quad B = \bigcup_{t \in (0,1)} (t, \frac{1}{t}).$$

a) (10 točk) Ugotovite, kateri množici sta A in B .

b) (15 točk) Dokažite, da velja $B^A \cong \mathbb{R}$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbb{N}^* = \{[n_1, \dots, n_k] \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$ množica vseh končnih zaporedij naravnih števil. *Stik* števila m in zaporedja $[n_1, \dots, n_k]$ je zaporedje

$$m :: [n_1, \dots, n_k] := [m, n_1, \dots, n_k].$$

Vsako končno zaporedje lahko sestavimo s stikanjem, začnši s praznim zaporedjem $[]$. Pravimo, da je relacija $R \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *skladna s stikanjem*, kadar velja

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*. \forall m, n \in \mathbb{N}. k R \ell \Rightarrow (m :: k) R (n :: \ell).$$

Denimo, da je $\sim$ neka ekvivalenčna relacija na $\mathbb{N}^*$, ki je skladna s stikanjem.

a) (10 točk) Ali smemo sklepati $[2, 0, 1, 9] \sim [2, 0, 2, 0]$? Odgovor utemeljite!

b) (15 točk) Ali smemo sklepati $[4, 2] \sim [1, 0, 0]$? Odgovor utemeljite!

4. naloga (25 točk)

Dokažite, da za vse množice A, B in preslikave $f: A \rightarrow B$ velja

$$f: A \rightarrow B \text{ je izomorfizem} \iff f_*: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B) \text{ je izomorfizem.}$$