

Logika in množice, 3. izpit

28. avgust 2020

1. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathcal{T}$ množica vseh točk v ravnini in $\mathcal{P}$ množica vseh premic v ravnini. S formulo zapišite vsako od naslednjih izjav. Pri tem uporabite zapis $T \in p$ za "točka T leži na premici p ", $p \parallel q$ za "premici p in q sta vzporedni" ter $p \perp q$ za "premici p in q sta pravokotni".

Izjava	Formula
Na vsaki premici ležita vsaj dve različni točki.	
Skozi vsaki točki poteka premica.	
Skozi točko T poteka vzporednica na premico p .	
Če imata premici p in q dve različni skupni točki, sta enaki.	
Vsaki dve premici, ki imata skupno pravokotnico, sta vzporedni.	

2. naloga (25 točk)

Pravimo, da je $a \in S$ *negibna točka* preslikave $f : S \rightarrow S$, kadar velja $a = f(a)$.

a) Podajte preslikavo $g : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, ki nima negibne točke.

b) Dokažite, da za vsako množico S , ki ni enojec, obstaja $h : S \rightarrow S$, ki nima negibne točke.

3. naloga (25 točk)

Dani so predikat ρ na množici A , predikat ψ na množici B in predikat φ na množici $A \times B$. Dokažite, da če velja

$$\forall x \in A. (\exists y \in B. \varphi(x, y)) \Rightarrow \rho(x)$$

in

$$\forall y \in B. (\exists x \in A. \varphi(x, y)) \Rightarrow \psi(y),$$

potem velja

$$\forall u \in A. \forall v \in B. \varphi(u, v) \Rightarrow \rho(u) \wedge \psi(v).$$

4. naloga (25 točk)

Na množici preslikav $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s predpisom

$$f \sim g \iff \forall n \in \mathbb{N}. f(f(n)) = g(g(n)).$$

Dokažite, da je kvocientna množica $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim$ neštevna.