

Logika in množice: 1. kolokvij

10. december 2009

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno. Veliko uspeha!

1. naloga (13 + 12 točk)

a) Pojasni matematični pomen izjave

$$\forall y \in \mathbb{R}. (a \leq y \wedge y \leq b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}. f(x) = y) ,$$

kjer je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$.

b) Izjavo "Slika funkcije f ne seka intervala $[a, b]$." zapiši v simbolni obliki.

2. naloga (25 točk)

a) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) .$$

b) (+5 točk) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) .$$

3. naloga (25 točk)

a) Za naravno število n naj bo $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Koliko je funkcij $f : [m] \rightarrow [n]$, za katere je moč množice $f^{-1}(\{0\})$ enaka k ? Odgovor utemelji.

b) (+5 točk) Izračunaj vrednost vsote

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k} .$$

4. naloga (25 točk)

Dokaži, da za vsaki množici A in B velja $\mathcal{P}(A)^B \cong \mathcal{P}(B)^A$.

5. naloga (čast in slava)

Ali za vsako množico B obstaja taka množica A , da je $B \times A^B \cong A$?

Logic and sets: First midterm exam

December 10, 2009

Available time: 120 minutes. The maximum grade is worth 100 points.

Question 1 (13 + 12 marks)

a) Explain the mathematical meaning of the statement

$$\forall y \in \mathbb{R}. (a \leq y \wedge y \leq b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}. f(x) = y) ,$$

where $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ and $a < b$.

b) Write down as a symbolic formula: “The image of function f does not intersect the interval $[a, b]$.”

Question 2 (25 marks)

a) Compose a formal proof tree of the formula

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) .$$

b) (+5 marks) Compose a formal proof tree of the formula

$$(\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) .$$

Question 3 (25 marks)

a) For a natural number n define $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$. How many functions $f : [m] \rightarrow [n]$ are there satisfying the condition that the set $f^{-1}(\{0\})$ has k elements?

b) (+5 marks) Compute the sum

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k} .$$

Question 4 (25 marks)

Prove that for all sets A and B it is the case that $\mathcal{P}(A)^B \cong \mathcal{P}(B)^A$.

Question 5 (honor and fame)

Is it the case that for every set B there is a set A such that $B \times A^B \cong A$?

Logika in množice: 1. kolokvij

10. december 2009

Čas reševanja je 120 minut. Doseženih 100 točk šteje za maksimalno oceno. Veliko uspeha!

1. naloga (13 + 12 točk)

a) Pojasni matematični pomen izjave

$$\forall y \in \mathbb{R}. (a \leq y \wedge y \leq b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}. f(x) = y) ,$$

kjer je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$.

Odgovor: Odgovor najdemo postopoma, tako da preberemo izjavo, nato pa jo spreminjamo:

1. "Za vsak $y \in \mathbb{R}$, če je $a \leq y$ in $y \leq b$, potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, da velja $f(x) = y$."
2. "Za vsak y z intervala $[a, b]$ obstaja tak $x \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = y$."
3. "Vsak y z interval $[a, b]$ je v sliki f ."
4. Končni odgovor: "Slika funkcije f vsebuje interval $[a, b]$."
5. Ekvivaletni odgovor: "Interval $[a, b]$ je vsebovan v sliki f ."
6. Pravilen, a nekoliko neroden odgovor: " f zavzame vse vrednosti z intervala $[a, b]$." (odgovor je neroden, ker je zelo podoben napačnemu, glej spodaj).

Tipični napačni odgovori, ki so bili vsaj podobni pravilnemu, so bili:

- "Slika f je vsebovana v intervalu $[a, b]$." (To je ravno nasprotna vsebovanost od pravilne.)
- "Slika f je enaka intervalu $[a, b]$." (Ni res, lahko da slika f vsebuje tudi elemente izven $[a, b]$.)
- " f je surjektivna." (Ni res, za f je znano le, da slika vsebuje interval $[a, b]$, ni nujno, da je slika celoten $\mathbb{R}$.)
- " f je surjektivna na $[a, b]$." (Ta odgovor ni pravilen, ker izraz "surjektivna na" ne pomeni ničesar in ga nismo definirali. Funkcija je bodisi surjektivna, bodisi ni, ne more pa biti "delno" surjektivna na nekem intervalu.)
- " f zavzame vse vrednosti na $[a, b]$." (Ta odgovor je problematičen, ker ga bi večinoma matematiki razumeli kot: za vsak $y \in \mathbb{R}$ obstaja $x \in [a, b]$, za katerega je $f(x) = y$.)

b) Izjavo "Slika funkcije f ne seka intervala $[a, b]$." zapiši v simbolni obliki.

Odgovor: Možnih je več ekvivalentnih odgovorov, recimo:

1. $f[\mathbb{R}] \cap [a, b] = \emptyset$
2. $\forall x \in \mathbb{R}. f(x) \notin [a, b]$
3. $\forall y \in [a, b]. \neg \exists x \in \mathbb{R}. f(x) = y$
4. $\forall y \in [a, b]. \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \neq y$
5. $\forall y \in \mathbb{R}. a \leq y \wedge y \leq b \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \neq y.$

2. naloga (25 točk)

a) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) .$$

Odgovor:

$$\frac{\frac{\frac{[(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma)]}{\psi \vee \sigma} \quad \frac{\frac{[\varphi \Rightarrow \psi] \quad [\phi]}{\psi} \quad \frac{\frac{[\varphi \Rightarrow \sigma] \quad [\phi]}{\sigma}}{\psi \vee \sigma}}{\psi \vee \sigma}}{\phi \Rightarrow \psi \vee \sigma}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma)}$$

b) (+5 točk) Sestavi formalno dokazno drevo izjave

$$(\varphi \Rightarrow \psi \vee \sigma) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \sigma) .$$

Odgovor:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\phi \vee \neg \phi}}{\psi \vee \sigma} \quad [\phi]}{(\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \sigma)} \quad \frac{\frac{[\psi]}{\phi \Rightarrow \psi} \quad \frac{[\sigma]}{\phi \Rightarrow \sigma}}{(\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \sigma)} \quad \frac{\frac{[\neg \phi] \quad [\phi]}{\perp} \quad \frac{\psi}{\phi \Rightarrow \psi}}{(\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \sigma)}}{(\phi \Rightarrow \psi \vee \sigma) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \sigma)}$$

3. naloga (25 točk)

a) Za naravno število n naj bo $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Koliko je funkcij $f : [m] \rightarrow [n]$, za katere je moč množice $f^{-1}(\{0\})$ enaka k ? Odgovor utemelji.

Opomba: Besedilo naloge je bilo nekoliko nerodno zapisano. Bolje bi bilo, če bi se naloga glasila: “Naj bodo m , n in k naravna števila. Koliko je funkcij $f : [m] \rightarrow [n]$, za katere je moč množice $f^{-1}(\{0\})$ enaka k ?” A to smo ugotovili šele na kolokviju, ko so študenti spraševali “Kaj je k ?”.

Odgovor: Funkcije preštejemo takole: najprej lahko na $\binom{m}{k}$ načinov izberemo k elementov v domeni $[m]$, ki jih f slika v 0. Tako preostane še $m-k$ elementov domene $[m]$, ki se lahko slikajo v katerokoli od $n-1$ vrednosti $1, \dots, n$ (ne smejo se slikati v 0). Tako dobimo

$$\binom{m}{k} \cdot \underbrace{(n-1) \cdots (n-1)}_{m-k} = \binom{m}{k} \cdot (n-1)^{m-k}$$

funkcij.

b) (+5 točk) Izračunaj vrednost vsote

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k}.$$

Odgovor 1: Iz prvega dela naloge vemo, da je $\binom{n}{k} m^{n-k}$ število funkcij $[n] \rightarrow [m+1]$, ki slikajo k elementov v 0. Vsota torej zaobjema vse funkcije $[n] \rightarrow [m+1]$, ki slikajo 0 elementov v 0, ali 1 element v 0, ali 2, ..., ali n elementov v 0. To pa so ravno vse funkcije $[n] \rightarrow [m+1]$, ki jih je $(m+1)^n$, torej je odgovor

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k} = (m+1)^n.$$

Odgovor 2: Uporabimo binomsko formulo

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Če nastavimo $a = m$ in $b = 1$, dobimo ravno našo vsoto, zato je

$$(m+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^{n-k}.$$

4. naloga (25 točk)

Dokaži, da za vsaki množici A in B velja $\mathcal{P}(A)^B \cong \mathcal{P}(B)^A$.

Odgovor 1: Poiščimo bijekcijo $F : \mathcal{P}(A)^B \rightarrow \mathcal{P}(B)^A$. Za $f \in \mathcal{P}(A)^B$ želimo definirati ustrezeni $F(f) \in \mathcal{P}(B)^A$. Se pravi, za vsak $a \in A$ moramo določiti podmnožico $F(f)(a) \subseteq B$, kar lahko storimo s predpisom

$$F(f)(a) = \{b \in B \mid ?\},$$

kjer je treba namesto vprašaja zapisati pogoj, ki določa, ali je b element $F(f)(a)$. Kaj lahko sploh sestavimo iz $f : B \rightarrow \text{pow}A$, $a \in A$ in $b \in B$? Uporabimo lahko f na b in dobimo podmnožico $f(b) \subseteq A$, od koder dobimo zamisel

$$F(f)(a) = \{b \in B \mid a \in f(b)\}.$$

Treba je še preveriti, ali je F bijekcija. V ta namen definiramo $G : \mathcal{P}(B)^A \rightarrow \text{pow}A^B$ in preverimo, da je inverz F . Zaradi simetrije med A in B se splača najprej preizkusiti, ali deluje

$$G(g)(b) = \{a \in A \mid b \in g(a)\}.$$

Preverimo, ali velja $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{P}(A)^B}$:

$$\begin{aligned} G(F(f))(b) &= \{a \in A \mid b \in F(f)(a)\} \\ &= \{a \in A \mid a \in f(b)\} \\ &= f(b). \end{aligned}$$

Simetričen izračun pokaže, da velja tudi $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{P}(B)^A}$.

Odgovor 2: Iz vaj vemo, da za poljubne množice X, Y in Z velja $(X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z}$ in $Y \times Z \cong Z \times Y$. Upoštevajmo, da je $\mathcal{P}(X) \cong 2^X$, kjer je $2 = \{0, 1\}$ množica z dvema elementoma (glej pomožni dokaz spodaj). Od tod dobimo

$$\mathcal{P}(A)^B \cong (2^A)^B \cong 2^{A \times B} \cong 2^{B \times A} \cong (2^B)^A \cong \mathcal{P}(B)^A.$$

Denimo, da na kolokviju ne veste, ali lahko uporabite dejstvo $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$. V tem primeru vprašate asistenta, ali je treba tudi to dokazati. Če pravi, da je, potem je tule dokaz. Definiramo funkcijo $\chi : \mathcal{P}(A) \rightarrow 2^A$ s predpisom

$$\chi(S)(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in S, \\ 0, & \text{če } x \notin S. \end{cases}$$

Funkciji $\chi(S)$ pravimo *karakteristična funkcija* podmnožice S . V obratno smer definiramo $k : 2^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ s predpisom

$$k(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\}.$$

Preverimo, da je $\chi \circ k = \text{id}_{2^A}$:

$$\chi(k(f))(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in k(f) \\ 0, & \text{če } x \notin k(f) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{če } f(x) = 1 \\ 0, & \text{če } f(x) = 0 \end{cases} = f(x).$$

Preverimo, da je $k \circ \chi = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$:

$$k(\chi(S)) = \{x \in A \mid \chi(S)(x) = 1\} = \{x \in A \mid x \in S\} = S.$$

5. naloga (čast in slava)

Ali za vsako množico B obstaja taka množica A , da je $B \times A^B \cong A$?

Odgovor 1: Da, prazna množica, ker je $B \times \emptyset^B \cong B \times \emptyset \cong \emptyset$.

Odgovor 2: Da, vzemimo $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} B^{B^n}$, to je neskončni kartezični produkt množic $B^{B^0}, B^{B^1}, B^{B^2}, \dots$. Tedaj je

$$B \times A^B \cong B \times \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} B^{B^n} \right)^B \cong B^1 \times \prod_{n \in \mathbb{N}} (B^{B^n})^B \cong B^{B^0} \times \prod_{n \in \mathbb{N}} B^{B^{n+1}} \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} B^{B^n} \cong A.$$