

Logika in množice: 2. kolokvij

16. januar 2013

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiramo relacijo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \iff a \leq a' \wedge (a + a')(a - a') \leq b - b'$$

- a) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ refleksivna.
- b) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ antisimetrična.
- c) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ tranzitivna.
- d) Ali je $\sqsubseteq$ tudi linearna urejenost?

2. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{R}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$x R y \iff x - y \text{ je praštevilo}$$

- a) Pokažite, da R ni ekvivalenčna.
- b) Poiščite najmanjšo ekvivalenčno relacijo Q , ki vsebuje R . *Namig:* ali velja $x Q (x + 1)$?
- c) Kaj je ekvivalenčni razred $Q[0]$? Kaj je $Q[x]$ za neki $x \in \mathbb{R}$?
- d) Poiščite množico $A \subseteq \mathbb{R}$, ki vsebuje po natanko en element iz vsakega razreda $Q[x]$.

3. naloga (25 točk)

Dani naj bosta množici A in B ter funkcija $f: A \rightarrow B$. Dokažite, da je f surjektivna natanko tedaj, kadar je $f^{-1}: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ injektivna.

4. naloga (25 točk)

Poiščite vse podmnožice $A \subseteq \mathbb{N}$, za katere obstaja taka družina podmnožic $B_i \subseteq \mathbb{N}$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq A$, vendar velja $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = A$. Torej, vsi končni preseki so različni od A , neskončen presek družine pa je enak A .

Namig: oglejte si $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ (vsa soda števila) in $A = \{11, 12, 13, \dots\}$ (vsa števila, večja od 10).