

Logika in množice: 1. kolokvij

26. november 2014

Čas reševanja je 120 minut. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Za vsako od izjav ugotovite, če je resnična ali neresnična. Odgovorov vam ni treba utemeljiti.

a) (5 točk) $\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. \exists z \in \mathbb{R}. x = y \cdot z.$

b) (5 točk) $\exists x \in \mathbb{R}. \forall y \in \mathbb{R}. \exists z \in \mathbb{R}. x = y \cdot z.$

c) (5 točk) $\exists y \in \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}. \exists z \in \mathbb{R}. x = y \cdot z.$

d) (5 točk) $\forall x \in \mathbb{R}. \forall y \in \mathbb{R}. \exists z \in \mathbb{R}. x = y \cdot z.$

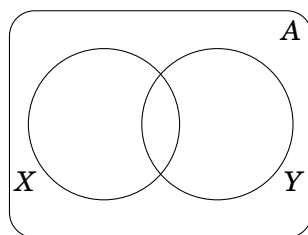
e) (5 točk) $\exists x \in \mathbb{R}. \exists z \in \mathbb{R}. \forall y \in \mathbb{R}. x = y \cdot z.$

2. naloga (25 točk)

Dana naj bo množica A . Za podmnožici $X, Y \subseteq A$ definiramo

$$X \triangleright Y = \{a \in A \mid a \in X \Rightarrow a \in Y\}$$

a) (5 točk) Na sliki označite množico $X \triangleright Y$.



b) (10 točk) Dokažite, da za poljubne množice $X, Y, Z \subseteq A$ velja

$$(X \triangleright Z) \cap (Y \triangleright Z) = (X \cup Y) \triangleright Z.$$

c) (10 točk) Dokažite, da enakost

$$f_*(X \triangleright Y) = f_*(X) \triangleright f_*(Y)$$

ne velja za vse množice A in $X, Y \subseteq A$ ter funkcije $f: A \rightarrow A$.

3. naloga (25 točk)

Dokažite naslednji izjavi.

a) (10 točk) $\forall x \in \mathbb{N}. x \neq x^+$

b) (15 točk) $\forall x, y \in \mathbb{N}. (x + y = 1) \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1)$

4. naloga (25 točk)

Dani sta *neprazni* množici A in B ter izjavi $\phi(x)$ in $\psi(y)$, kjer je $x \in A$ in $y \in B$.

a) (10 točk) Dokažite, da velja

$$(\forall a \in A. \exists b \in B. \psi(b) \Rightarrow \phi(a)) \Rightarrow ((\forall y \in B. \psi(y)) \Rightarrow \forall x \in A. \phi(x)).$$

b) (15 točk) Dokažite, da velja

$$((\forall y \in B. \psi(y)) \Rightarrow \forall x \in A. \phi(x)) \Rightarrow (\forall a \in A. \exists b \in B. \psi(b) \Rightarrow \phi(a)).$$