

Logika in množice: 2. kolokvij

26. januar 2015

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore morate utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Ali obstajata taki *neštevni* podmnožici $\mathbb{R}$, da je njun presek *šteвно neskončna* množica?

2. naloga (25 točk)

Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo relacijo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$m \sqsubseteq n \iff \forall k \in \mathbb{N}. (k \mid m \Rightarrow k \mid n),$$

pri čemer je $\mid$ relacija deljivosti.

a) (12 točk) Dokažite, da je $\sqsubseteq$ delna ureditev.

b) (8 točk) Izračunajte infimum in supremum množice $\{24, 40\}$.

c) (5 točk) Ali je $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ polna mreža?

3. naloga (25 točk)

Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$w \sim z \iff \exists t \in \mathbb{R}. (t > 0 \wedge w = t \cdot z).$$

Relacija $\sim$ je ekvivalenčna, česar ni treba dokazovati.

a) (1 točka) Skicirajte $[2 - i]_{\sim}$.

b) (10 točk) Naj bo $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \vee |z| = 1\}$ množica vseh kompleksnih števil, katerih absolutna vrednost je 0 ali 1. Dokažite, da velja $\mathbb{C}/\sim \cong S$.

c) (7 točk) S predpisom $[w]_{\sim} \odot [z]_{\sim} = [w \cdot z]_{\sim}$ definiramo preslikavo $\odot : \mathbb{C}/\sim \times \mathbb{C}/\sim \rightarrow \mathbb{C}/\sim$. Preverite, da je $\odot$ dobro definirana.

d) (7 točk) Dokažite, da predpis $[w]_{\sim} \oplus [z]_{\sim} = [w + z]_{\sim}$ ne podaja dobro definirane preslikave $\oplus : \mathbb{C}/\sim \times \mathbb{C}/\sim \rightarrow \mathbb{C}/\sim$.

4. naloga (25 točk)

Dana naj bo družina množic $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, za katero velja

$$|A_0| \leq |A_1| \leq |A_2| \leq |A_3| \leq \dots$$

Dokažite, da za vse $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\coprod_{i \in \mathbb{N}} A_i \cong \coprod_{i \in \mathbb{N}} A_{i+k}.$$