

Logika in množice, 2. kolokvij

20. januar 2017

1. naloga (16 točk)

Imejmo dano množico $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na njej podamo dvomestno relacijo $R \subseteq A \times A$,

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 3)\}.$$

a) (3 točke) Narišite graf relacije R .

b) (5 točk) Podajte relaciji R^{-1} in R^2 .

c) (8 točk) Označite vse tiste lastnosti, ki jih ima relacija R . Odgovorov ni treba utemeljiti.

refleksivnost:	DA	NE	irefleksivnost:	DA	NE
simetričnost:	DA	NE	antisimetričnost:	DA	NE
asimetričnost:	DA	NE	tranzitivnost:	DA	NE
sovisnost:	DA	NE	stroga sovisnost:	DA	NE

2. naloga (12 točk)

Za poljubni realni števili $x, y \in \mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$ kot

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

a) (3 točke) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na realnih številih.

b) (2 točki) Določite ekvivalenčna razreda $[0]$ in $[\frac{1}{2}]$.

c) (3 točke) Poiščite kakšno podmnožico realnih števil, ki vsebuje natanko en element iz vsakega ekvivalenčnega razreda.

d) (4 točke) Naj $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ označuje enotsko krožnico v ravnini in naj bo $\mathbb{R}/\sim$ kvocientna množica (množica ekvivalenčnih razredov) glede na relacijo $\sim$. Definirajmo preslikavo $f: \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$ s predpisom

$$f([x]) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Dokažite, da je preslikava f bijektivna.

3. naloga (10 točk)

Naj bo $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 42\}$. Množico $X \times X$ opremimo z delno urejenostjo

$$(a, b) \preceq (c, d) \iff a \leq c \wedge b \mid d.$$

a) (8 točk) Določite prve, zadnje, minimalne in maksimalne elemente.

b) (2 točki) Ali je relacija $\preceq$ linearna? Odgovor utemeljite!

4. naloga (12 točk)

Naj bosta X, Y poljubni množici in $f: X \rightarrow Y$ funkcija med njima. Dokažite, da je f surjektivna natanko tedaj, ko za vsako $A \subseteq Y$ velja $f[f^{-1}[A]] = A$.