

Logika in množice, 1. kolokvij

28. november 2018

1. naloga (25 točk)

Naj bo A množica, $\mathbf{1} := \{()\}$ in $\mathbf{2} := \{\top, \perp\}$.

a) (10 točk) Podajte izomorfizem $A \times (A + \mathbf{1}) \rightarrow A^2 + A$.

b) (15 točk) Utemeljite, da je preslikava, ki ste jo podali, dejansko izomorfizem.

2. naloga (25 točk)

Definirajmo $V(p, q, r) := \neg p \vee (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$.

a) (10 točk) Zapišite resničnostno tabelo za izraz $V(p, q, r)$.

p	q	r	
$\top$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\perp$	
$\top$	$\perp$	$\top$	
$\top$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	
$\perp$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	

b) (5 točk) Zapišite konjunktivno normalno obliko za V .

c) (10 točk) Naj bosta u in v izjavna simbola. Ali je $V(u, v, u \Rightarrow v)$ tautologija?

3. naloga (25 točk)

Naj bo A množica ter φ, ψ in ϑ predikati na A . Dokazite izjavo

$$\left(\forall x \in A. \neg(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)) \right) \Rightarrow (\exists y \in A. \varphi(y)) \vee (\forall z \in A. \vartheta(z)).$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo X množica. Za $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ rečemo:

- $\mathcal{A}$ je *gornja množica*, kadar za vse $S, T \subseteq X$ velja: če $S \in \mathcal{A}$ in $S \subseteq T$, potem tudi $T \in \mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ je *zaprta za vse preseke*, kadar za vsak $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ velja $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.
(Pri tem kot običajno $\bigcap \mathcal{B}$ označuje množico $\{x \in X \mid \forall S \in \mathcal{B}. x \in S\}$.)

Označimo

$$\Phi := \{ \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \mid \mathcal{A} \text{ je gornja množica in zaprta za vse preseke} \}.$$

Za vsak $S \subseteq X$ označimo še

$$\uparrow S := \{ T \in \mathcal{P}(X) \mid S \subseteq T \}.$$

a) (10 točk) Dokažite, da za vsak $S \subseteq X$ velja $\uparrow S \in \Phi$.

b) (15 točk) Dokažite, da velja $\Phi \cong \mathcal{P}(X)$.