

Logika in množice, 2. kolokvij

16. januar 2019

1. naloga (25 točk)

Na množici $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ definiramo delno ureditev $\sqsubseteq$ s predpisom

$$m \sqsubseteq n \iff (m \mid n) \wedge 2 \mid (m - n).$$

Z besedami: $m \sqsubseteq n$ velja, kadar m deli n ter imata m in n enako parnost. Dejstva, da je to res delna ureditev, ni treba preverjati. Vprašanja se nanašajo na delno urejenost $(P, \sqsubseteq)$. Odgovorov ni treba utemeljevati.

a) (5 točk) Narišite Hassejev diagram relacije $\sqsubseteq$.

b) (5 točk) Zapišite najdaljšo verigo v P .

c) (5 točk) Zapišite vse minimalne elemente P .

d) (5 točk) Poiščite največjo spodnjo in najmanjšo zgornjo mejo podmnožice $\{4, 6\}$.

e) (5 točk) Zapišite kako podmnožico P , ki ima najmanjši element, a nima nobene zgornje meje.

2. naloga (25 točk)

Naj preslikava $Z: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ realni funkciji priredi množico njenih ničel, tj.

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}.$$

a) (7 točk) Izračunajte $Z(x \mapsto x^2 + x - 2)$.

b) (6 točk) Izračunajte prasliko $Z^*(\{\mathbb{R}\})$.

c) (6 točk) Ali je Z injektivna preslikava?

d) (6 točk) Ali je Z surjektivna preslikava?

3. naloga (45 točk)

Naj bo $\triangleleft$ relacija na množici A . Na $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ definiramo relacijo $\sqsubset$ s predpisom

$$X \sqsubset Y \iff \forall a \in X. \forall b \in Y. a \triangleleft b.$$

a) (25 točk) Dokažite, da je $(A, \triangleleft)$ stroga urejenost natanko tedaj, ko je $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \sqsubset)$ stroga urejenost.

b) (10 točk) Naj bo $f: A \rightarrow A$ strogo monotona preslikava, tj.

$$\forall a, b \in A. a \triangleleft b \Rightarrow f(a) \triangleleft f(b).$$

Dokažite, da je tudi preslikava

$$\begin{aligned} F: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} &\rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \\ F(X) &= f_*(X) \end{aligned}$$

strogo monotona za relacijo $\sqsubset$.

c) (10 točk) Naj bo $g: A \rightarrow A$ strogo monotona **surjektivna** preslikava. Ali smemo sklepati, da je preslikava

$$\begin{aligned} G: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} &\rightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \\ G(X) &= g^*(X) \end{aligned}$$

strogo monotona za relacijo $\sqsubset$?

Namig: ali obstajajo stroga urejenost $(A, \triangleleft)$, strogo monotona preslikava $g: A \rightarrow A$ in $x, y \in A$, da velja $g(x) \triangleleft g(y)$ in ne velja $x \triangleleft y$?

4. naloga (25 točk)

Dokažite: če velja splošena Cantorjeva hipoteza, potem za vse množice X in Y iz $|X| < |Y|$ sledi $|\mathcal{P}(X)| < |\mathcal{P}(Y)|$.

Nauk: splošena Cantorjeva hipoteza pravi, da **ne** obstajata neskončni množici A in B , za kateri bi veljalo $|A| < |B| < |\mathcal{P}(A)|$.