

Logika in množice, 1. kolokvij

28. november 2019

1. naloga (25 točk)

Preslikavo $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiramo s predpisom $s(n) := n + 1$. Definirajmo še preslikavi f in g :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ f : a &\mapsto (a(0), a \circ s) & g : (x, b) &\mapsto \left(n \mapsto \begin{cases} x & \text{če } n = 0, \\ b(n-1) & \text{če } n > 0 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Preverite, da je f izomorfizem z inverzom g .

2. naloga (25 točk)

Definirajmo $V(p, q, r) := \neg(r \wedge (p \vee q))$.

a) (10 točk) Zapišite resničnostno tabelo za izraz $V(p, q, r)$.

p	q	r	
$\top$	$\top$	$\top$	
$\top$	$\top$	$\perp$	
$\top$	$\perp$	$\top$	
$\top$	$\perp$	$\perp$	
$\perp$	$\top$	$\top$	
$\perp$	$\top$	$\perp$	
$\perp$	$\perp$	$\top$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	

b) (5 točk) Zapišite konjunktivno normalno obliko za V .

c) (10 točk) Čim bolj poenostavite izraz $V(p, q, r)$. Za polno število točk naj izraz vsebuje le dva izjavna veznika.

3. naloga (25 točk)

Naj bo A množica in $\mathbf{1} = \{()\}$ standardni enojec. Dokažite izjavo

$$(\exists f \in A^{A+1}. \forall a \in A. f(\iota_1(a)) = a) \Leftrightarrow (\exists z \in A. \top).$$

4. naloga (25 točk)

Naj bosta A in B množici in naj bo $f: A \rightarrow B$ preslikava.

a) (5 točk) Naj bosta $x, y \in A$ različna elementa, za katera velja $f(x) = f(y)$. Dokažite

$$f_*(A) = f_*(A \setminus \{y\}).$$

b) (5 točk) Dokažite: če je f injektivna, slika prave podmnožice v prave podmnožice, tj.

$$\forall S \in \mathcal{P}(A). S \neq A \Rightarrow f_*(S) \neq B.$$

c) (15 točk) Dokažite, da sta naslednji trditvi ekvivalentni.

- i) Preslikava f slika prave podmnožice v prave podmnožice.
- ii) Če je f surjektivna, potem je tudi injektivna.