

Prvi izpit iz Matematike 1 (UNI)

23. januar 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1 Tabela osnovnih odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \quad (3)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \quad (5)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (6)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

2 Tabela osnovnih integralov

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{za } r \neq -1 \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (11)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (12)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (13)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (14)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C \quad (20)$$

1. naloga (25 točk)

Poišči tista kompleksna števila z , ki rešijo enačbo

$$z^3 = \frac{i}{1-i}$$

in ležijo v drugem kvadrantu.

Rešitev: $z = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$$

- a) Določi definijsko območje D_f funkcije f .
- b) Skiciraj graf funkcije f .
- c) Dokaži, da je funkcija f injektivna.
- d) Določi zalogo vrednosti Z_f funkcije f .
- e) Poišči predpis za inverzno funkcijo $f^{-1} : Z_f \rightarrow D_f$.

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b)
- c) $f(x) = 1 + \frac{2}{x^3 - 1}$, zato iz $f(x) = f(y)$ sledi $x^3 - 1 = y^3 - 1$, torej $x = y$
- d) $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- e) $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = (x^2 + 1) \log(x^2 + 1).$$

- a) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 0$.
- b) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $y = 0$

- b) Edina stacionarna točka je $x = 0$, ki je lokalni minimum.

4. naloga (25 točk)

Naj bo D omejeno območje, ki leži desno od y osi in ga omejujejo y os ter grafa funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = \sin x$.

- a) Izračunaj ploščino območja D .
- b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če območje D zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $\sqrt{2} - 1$

b) $\frac{\pi}{2}$