

Prvi izpit iz Matematike 1 (UNI)

28. januar 2019

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Števila

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\textbf{Diskriminanta: } D = b^2 - 4ac$$

$$\textbf{Ničle: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\textbf{Teme: } T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

D_f in Z_f

$f(x)$	D_f	Z_f
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\log x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Kotne funkcije

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

(De)faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}\end{aligned}$$

Povezave

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(2\pi - x) &= -\sin x, & \cos(2\pi - x) &= \cos x\end{aligned}$$

Odvodi

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad (r \in \mathbb{R}) \\ (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \ln a \quad (a > 0) \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0) \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Linearen približek:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Integrali

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0) \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C\end{aligned}$$

$$\textbf{Prostornina vrtenine: } V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$\textbf{Plašč vrtenine: } P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$\textbf{Dolžina loka: } l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

1. naloga (25 točk)

Dana je množica $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \Re z + \Im z\}$.

- a) V kompleksni ravnini nariši množico A .
- b) Poišči tista kompleksna števila z , ki rešijo enačbo $z^4 = -16$ in ležijo v množici A .

Rešitev:

- a) Prvi kvadrant.
- b) $z = \sqrt{2}(1 + i)$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

a) Določi D_f .

b) Ali obstaja takšno število $a \in \mathbb{R}$, da je funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in D_f \\ a & : x \in \mathbb{R} \setminus D_f \end{cases}$$

zvezna?

c) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

d) Dokaži, da je f injektivna na intervalu $(0, \infty)$ in določi predpis za inverzno funkcijo $f^{-1} : f((0, \infty)) \rightarrow (0, \infty)$.

Rešitev:

a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) 0

d) $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}}$ za $y \in (0, \frac{1}{2})$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2}.$$

- a) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
- b) Poišči stacionarne točke, lokalne ekstreme in intervale naraščanja ter padanja funkcije f .

Rešitev:

a) $y = \frac{\pi+1}{2} - x$

- b) Stacionarne točke so $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (lok. min.), $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (lok. maks). Prva je lokalni maksimum, druga pa lokalni minimum. Funkcija raste na intervalih $(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ in $((2k+1)\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pada pa na intervalih $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ in $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo D omejeno območje, ki ga omejujejo krivulje $x = 0$, $y = e^x$ in $y = xe^x$.

- a) Izračunaj ploščino območja D .
- b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če območje D zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $e - 2$

b) $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$