

Tretji izpit iz Matematike 1 (UNI)

13. junij 2017

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1 Tabela osnovnih odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \quad (3)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \quad (5)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (6)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

2 Tabela osnovnih integralov

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{za } r \neq -1 \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (11)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (12)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (13)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (14)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C \quad (20)$$

1. naloga (25 točk)

Pokaži, da je število $11^n - 1$ deljivo z 10 za vsako naravno število n .

2. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g s predpisoma

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

- a) Določi definicijski območji funkcij f in g .
- b) Ali je funkcija f soda ali liha? Ali je funkcija g soda ali liha?
- c) Poišči inverzno funkcijo funkcije g . Kje je definirana?
- d) Določi predpisa kompozitumov $f \circ g$ in $g \circ f$.

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) f je soda, g ni niti soda niti liha.
- c) $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- d) $(f \circ g)(x) = -\frac{4x}{(1-x)^2}$, $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^2} - 1$

3. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Največja vrednost je $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}$, najmanjša pa $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -e^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $a > 0$ dano število, s predpisom

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

pa je podana funkcija f . Tisti del grafa funkcije f , ki leži nad intervalom $[0, a]$, označimo z γ .

a) Izračunaj dolžino krivulje γ .

b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo γ zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $\frac{3a}{2}$

b) $\frac{16\pi a^3}{105}$