

Četrty izpit iz Matematike 1 (UNI)

28. junij 2018

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa ni dovoljeno odpirati, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven osebni dokument s sliko in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- Popolnoma izklopite mobilne telefone in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak test morate obvezno oddati.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Tabela odvodov

$$\begin{aligned}(x^r)' &= rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \\ (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Tabela integralov

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \text{za } a > 0 \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

Adicijski izreki

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Defaktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

Faktorizacija

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Dvojni in polovični koti

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

Vrednosti kotnih funkcij

$\theta \rightarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/

Prostornina vrtenine

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Površina plašča vrtenine

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dolžina loka

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

1. naloga (25 točk)

Poišči vsa kompleksna števila z , za katera velja

$$z^4 = \frac{2i}{1-i}$$

in ležijo v drugem ali tretjem kvadrantu.

Rešitev: $z_1 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16} \right)$, $z_2 = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16} \right)$

2. naloga (25 točk)

Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

- a) Določi defincijsko območje D_f funkcije f .
- b) Nariši graf funkcije f .
- c) Ali je funkcija f injektivna?
- d) Določi zalogo vrednosti funkcije f .
- e) Poišči predpis inverzne funkcije f^{-1} . Kje je definirana?

Rešitev:

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- b)
- c) Da.
- d) $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- e) $f^{-1}(x) = \frac{1+2y}{1-y}$

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = x + \sin^2 x.$$

- a) Določi enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 0$.
- b) Poišči stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev:

a) $y = x$

- b) Stacionarne točke so pri $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Lokalni maksimumi so pri $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), lokalni minimumi pa pri $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$, $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{2}}$ in D območje, ki leži med grafoma funkcij f ter g nad intervalom $[0, 1]$.

a) Izračunaj ploščino lika D .

b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če lik D zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $2 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $\pi \left(1 - 3e^{-1}\right)$