

Peti izpit iz Matematike 1 (UNI)

29. avgust 2017

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

NAVODILA

- Testa **ni dovoljeno odpirati**, dokler vam asistent ne reče, da smete začeti.
- Ko dobite test, vpišite svoje ime, priimek in vpisno številko. Uporabljajte velike tiskane črke.
- Pripravite veljaven **osebni dokument s sliko** in študentsko izkaznico, da ju bo asistent lahko pregledal.
- Na testu smete uporabljati samo pisalo in brisalo. Uporaba drugih pripomočkov, vključno s kalkulatorjem in zapiski, ni dovoljena.
- **Popolnoma izklopite mobilne telefone** in druge elektronske naprave. Če vam med testom zazvoni telefon, se to šteje kot prepisovanje.
- Čas pisanja je 90 minut. Če končate predčasno, lahko tudi prej odidete, ampak **test morate obvezno oddati**.
- Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

1 Tabela osnovnih odvodov

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{za } r \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{za } a > 0 \quad (3)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{za } a > 0 \quad (5)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (6)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (7)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (8)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (9)$$

2 Tabela osnovnih integralov

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \quad \text{za } r \neq -1 \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (11)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (12)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (13)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (14)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C \quad (20)$$

1. naloga (25 točk)

Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{in} \quad g(x) = \sin x.$$

- a) Poišči predpis za sestavljeno funkcijo $f \circ g$ in določi njeno definicijsko območje.
- b) Katere od funkcij f , g in $f \circ g$ so sode ali lihe?
- c) Poišči inverzno funkcijo funkcije f . Kje je definirana?

Rešitev:

- a) $(f \circ g)(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{(4k-1)\pi}{2} \right\}$
- b) f ni niti soda niti liha, g je liha.
- c) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$ je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. naloga (25 točk)

Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

na intervalu $[-1, 1]$.

Rešitev: Največja vrednost je $f(0) = 1$, najmanjša pa $f(1) = f(-1) = 0$.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj naslednja integrala.

a) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 3}{x^2 - 6x + 10} dx$

b) $\int_{-1}^0 (1 - x^2) e^{-x} dx$

Rešitev:

a) $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2 - 6x + 10) + 3 \arctan(x - 3) + C$

b) 1

4. naloga (25 točk)

Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x} \sqrt{y},$$

ki zadošča pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: $y = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$